a) A $+6$ szám kívánt előállításában kell fellépnie pozitív és negatív egész szám köbének is, mert a legkisebb pozitív köböt véve $4\cdot 1^3<6$, viszont a következővel $2^3>6$. Így kapjuk a

$$6=2^3+(-1)^3+(-1)^3+0^3(^*) \tag{1}$$

előállítást, amiből mindjárt $-6=(-2)^3+1^3+1^3+0^3$. Mivel bármely, az előírásnak megfelelő előállításbán mind a négy köbalap helyére a (-1)-szeresét írva, az összeg (-1)-szeresét kapjuk, ezért elég 6 pozitív többszöröseit tekintenünk.

Könnyíti a további próbálgatást az az észrevétel is, hogy (1)-ben két köb alapja páratlan; ugyanis már ebből látjuk, hogy mivel $6k$ és a tagok számapáros, a páratlan köbalapok számának mindig párosnak kell lennie. Másrészt, ha $6k$ nem osztható 8-cal, akkor kell is fellépnie páratlan alapnak, mert akárhány páros szám köbösszege osztható $2^3=8$-cal.

Ezek alapján könnyen adódnak a következők (a köbalapokat abszolút értékük szerint csökkenően rendezve):

$$\begin{aligned}
12&=3^3+(-2)^3+(-2)^3+1^3,(^*)\\
18&=2^3+2^3+1^3+1^3,\\
&=3^3+(-2)^3+(-1)^3+0^3\\
&=4^3+(-3)^3+(-3)^3+2^3,(^*)\\
24&=2^3+2^3+2^3+0^3,\\
&=3^3+(-1)^3+(-1)^3+(-1)^3,\\
&=5^3+(-4)^3+(-4)^3+3^3 \qquad (^*)
\end{aligned}$$

Majdnem mindegyik előállítás tartalmaz egyenlő alapokat és az ismétlődéseket jobban megfigyelve látjuk, hogy mind a négy szám $(^*)$ jelű előállításában a középső két alap egyenlő és ezek abszolút értékének a szélső alapok szomszédai.

b) Az ezekből adódó sejtés mindjárt bizonyítását is adja a feladat állításának, ugyanis a középső két alap abszolút értékét n-nel jelölve

$$(n+1)^3+(-n)^3+(-n)^3+(n-1)^3=6n,$$

és ez az azonosság minden egész n esetére ad egy az előírásnak megfelelő előállítást.