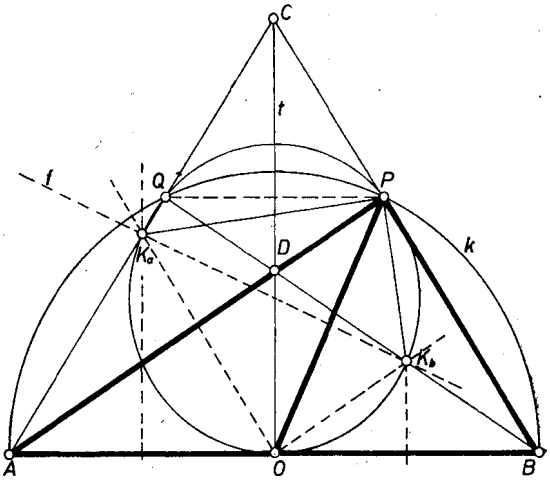
I. megoldás. *a)* Az adott k kör OP sugara a POA és POB háromszögek közös oldala, ezért K_a, K_b rajta van OP-nek f felező merőlegesén, tehát az $OK_aPK_b = N$ négyszög szimmetrikus f-re (deltoid), $K_aOK_b\sphericalangle = K_aPK_b\sphericalangle$.

Másrészt a K_aOK_b szög két szára a k-beli PA, ill. PB húr felező merőlegese, ezért $K_aOK_b\sphericalangle = APB\sphericalangle$, ami a föltevés szerint derékszög. Így O, P rajta van a K_aK_b szakasz feletti Thalész-körön, tehát N húrnégyszög, az első állítást bebizonyítottuk.



b) Az AK_a, BK_b egyenesek metszéspontját Q-val jelölve elég belátnunk, hogy $AQB\sphericalangle$ derékszög, vagy – ami ugyanaz – hogy a $\delta = QAB\sphericalangle + QBA\sphericalangle$ összeg derékszög. Valóban, az OAK_a és OBK_b egyenlő szárú háromszögek, ezért

$$\delta = K_aOA\sphericalangle + K_bOB\sphericalangle = AOB\sphericalangle - K_aOK_b\sphericalangle = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ.$$

Felhasználtuk, hogy K_a, K_b az AB átmérőnek ugyanazon partján vannak, mint P. Ez helyes, mert a POA, POB háromszögek P-nél levő szöge hegyesszög.

Lengyel János (Budapest, I. István Gimn., I. o. t.)
Horváth Mária (Hódmezővásárhely, Liszt F. Ének-Zenei Ált. Isk., 7. o. t.)

Megjegyzések. 1. Az *a)* állítás így is bizonyítható: a középponti és kerületi szögek tétele alapján N-ben

$$OK_aP\sphericalangle + OK_bP\sphericalangle = 2 \cdot OAP\sphericalangle + 2 \cdot OBP\sphericalangle = 2(BAP\sphericalangle + ABP\sphericalangle) = 180^\circ,$$

mert ABP derékszögű háromszög. Felhasználtuk, hogy A és K_a az OP húrnak ugyanazon oldalán vannak, úgyszintén B és K_b is, mert PAO és PBO hegyesszögek.

2. A *b)* részben azt is beláthatjuk, hogy Q a P pont tükörképe AB felező merőlegesére nézve. Valóban

$$QAO\sphericalangle = K_aAO\sphericalangle = K_aOA\sphericalangle = PBO\sphericalangle,$$

mert $K_aO \| PB$, hiszen mindkettő merőleges PA-ra.

II. megoldás. Az APB háromszög P-nél derékszögű. K_a-t és K_b-t származtathatjuk mint AP és AO, ill. BP és BO felező merőlegesének a metszéspontját. AP és BP felező merőlegese az ABP háromszögben az egyik, ill. másik befogóval párhuzamos középvonal. Felhasználva még, hogy AK_aO és OK_bB egyenlő szárú háromszögek, kapjuk, hogy

$$K_aAO\sphericalangle = K_aOA\sphericalangle = PBO\sphericalangle \quad \text{és} \quad K_bBO\sphericalangle = K_bOB\sphericalangle = PAO\sphericalangle,$$

tehát az AK_a és BK_b egyenes BP-nek, ill. AP-nek tükörképe az AB szakasz t felező merőlegesére; így merőlegesek egymásra, Q metszéspontjuk az AB átmérőjű körön van, P tükörképe t-re. Ezzel igazoltuk a feladat második állítását.

Mivel a befogókkal párhuzamos középvonalak átmennek O-n, így a K_aK_b szakasz O-ból derékszögben látszik; végül K_a is, K_b is rajta van az AOP és BOP háromszögek közös OP oldalának felező merőlegesén, tehát O és P egymás tükörképei a K_aK_b egyenesre, így P is rajta van a K_aK_b átmérőjű körön. Ezzel a feladat első állítását is igazoltuk.

Megjegyzések. 1. A K_aK_b átmérőjű kör Q-n is átmegy, mert innen is derékszögben látszik K_aK_b, amennyiben Q és K_a különböző.

2. AK_a-nak és BP-nek C metszéspontja, valamint BK_b-nek és AP-nek D metszéspontja t-n van a bizonyított szimmetria miatt, és K_a felezi AC-t, K_b pedig BD-t, mert az AOC, ill. BOD háromszög t-vel párhuzamos középvonalán van.