

a) Az egymás utáni (egész) számokból képezett, soronként és oszloponként ugyanannyi számot tartalmazó számrendezést bővös négyzetnek szokás nevezni, ha a számok összege minden sorban, minden oszlopban és mindkét átló mentén ugyanannyi. Az egy sorban álló számok száma a bővös négyzet rendszáma.

Nevezzük hasonlóan a Laci bélyegzőjével készített számalakzatot – már előre – 5-örendű bővös kövezetnek (par-kettnek). Ekkor Laci fő állítása az, hogy bárhol teszünk rá a bővös kövezetre egy 5 egységnyi oldalú, négyzet alakú K keretet úgy, hogy oldalai 2-2 szomszédos számoszlop, ill. számsor között haladjanak, K mindig 5-örendű bővös négyzetet zár körül. (Egységnek természetesen a bélyegző kis négyzeteinek, mezőinek oldalhosszát tekintjük.) Ez természetesen feltételezi annak a kijelentésnek a helyességét is, hogy a kövezet minden mezeje megtelik, K minden sorában és minden oszlopában mindig 5 szám áll. – Megmutatjuk, hogy Laci állításai helyesek.

K minden (az előírás szerinti) helyzetében tartalmazza az $1, 2, \dots, 25$ számok mindegyikét. Ugyanis bármelyiküket, mondjuk A -t, bármely lenyomatbeli előfordulásától kiindulva ugyanazon sorban 5 mezővel jobbra haladva és ugyanazon oszlopban fölfelé 5 mezővel haladva ismét megtaláljuk a kövezetben, így ha K -nak 1 egységgel pl. jobbra való eltolásával egy A szám a bal szélső oszlopból eltűnik, ugyanakkor megjelenik az új jobb szélső oszlopban. Ugyanez áll a sorokra is.

A mondottak alapján elég azt belátni, hogy K egy helyzetében az $1-25$ számok különböző mezőbe kerülnek; ebből már következik, hogy az egész kövezet megtelik számokkal átfedés nélkül. K -nak abban a helyzetében, melynek bal alsó sarokmezeje a bélyegző kiindulási helyzetében az 5-ös szám sorának és a 25 oszlopának a közös mezeje, a 2. ábra szerint helyezkednek el a számok:

	4	10	11	17	23	4	10	11	17	23
	16	22	3	9	15	16	22	3	9	15
K	8	14	20	21	2	8	14	20	21	2
	25	1	7	13	19	25	1	7	13	19
	12	18	24	5	6	12	18	24	5	6

2. ábra

Ábránkban mind az 5 sor (a kereten belül), mind az 5 oszlop és a két átló 65-öt ad összegül. Miután K -t egy-egy oszloppal vagy sorral eltolva az eltűnő oszlop, ill. sor a keret másik szélén újra fellép az elmondottak szerint, így tüstént következik, hogy a sorok és oszlopok összege K minden helyzetében 65, csak az átlók menti összeget kell még ellenőriznünk.

Ehhez belátjuk, hogy az átlósan elhelyezkedő számok is ötösével periodikusan következnek egymás után. Ha K -bármely helyzetéből 5 oszloppal pl. jobbra toljuk, akkor a számoknak ugyanazt az elhelyezkedését találjuk, mint K előző helyzetében. A 2. ábrában ezt a kicsi jegyekkel írt számok mutatják. Ugyanez áll, ha új helyzetéből 5 sorral feljebb, ill. lejjebb toljuk K -t. Ekkor azonban a K eredeti helyzetében jobbra fel, ill. lefelé haladó átló folytatásában megismétlődnek az átlóban elhelyezkedő számok, változatlan sorrendben.

Ezzel állításunkat igazoltuk minden átlóra, hiszen meg gondolásunk K bármely helyzetére vonatkozik.

Az átlóbeli számok összegét elég így a fenti kibővített táblázatban a bekeretezett rész első sorából jobbra lefelé haladó átlókra és a kereten kívülről balra lefelé induló átlókra ellenőrizni, és ezek szintén mind 65-öt adnak. – Ezzel Laci állításait igazoltuk.

8		6		24	18	12	6	5	24	18	12	5	5	24	18	12	6	5	24
10		23		11	10	4	23	17	11	10	4	23	17	11	10	4	23	17	11
22		15		3	22	16	15	9	3	22	16	15	9	3	22	16	15	9	3
14		2		20	14	8	2	21	20	14	8	2	21	20	14	8	2	21	20
1		19		7	1	25	19	13	7	1	25	19	13	7	1	25	19	13	7
18		6		24	18	12	6	5	24	18	12	6	5	24	18	12	6	5	24
10		23		11	10	4	23	17	11	10	4	23	17	11	10	4	23	17	11
22		15		3	22	16	15	9	3	22	16	15	9	3	22	16	15	9	3
14		2		20	14	8	2	21	20	14	8	2	21	20	14	8	2	21	20
I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.	XI.	XII.	XIII.	XIV.	XV.	XVI.	XVII.	XVIII.	XIX.	XX.

3. ábra

b) Megmutatjuk, hogy Marci guruló bélyegzőjével lényegében ugyanazt a kövegetet kapjuk, mint Laciéval. Ebből már következik, hogy megvannak a fent látott tulajdonságai. Bélyegzőjének lenyomatán (3. ábra) a számok első bejegyzéseit rendes alakú vastag számjegyekkel írtuk és bekarikáztuk, a XI. oszloptól kezdődő ismétlés számjegyei állók, vastagok (a XXI. oszlop természetesen az I-be jut s í. t.), a föl és lefelé való megismétlések jegyei aprók. A páratlan sorszámú oszlopok mind megteltek, átfedés nincs.

Ha a bélyegzőt a papíron végigurítjuk (elég azonban egy fordulat is), majd ezt jobbra 5 egységgel eltolva megismételjük (lásd a VI., VIII., ..., XX. oszlop félben csíkozott mezőin levő bejegyzéseket), a keretben megtaláljuk a 2. ábra keretét, csupán az oszlopok jobbról balfelé követik egymást ugyanabban a sorrendben.

Láttuk fentebb, hogy a készített sáv bőven elegendő a köveget tulajdonságainak megvizsgálásához. Megjegyezhetjük azonban, hogy szélesebb sávot viszont csak nehézkesen készíthetnénk a bélyegzővel, 4 sorát átfedve. És mivel az 1., 2., ..., 5, a 6, 7, ..., 10 stb. számoknak a Lacinál jól látható szabályos elrendeződése Marcinál már úgysem látható, célszerűbb lenne a bélyegzőt úgy készíteni, hogy egyetlen legurítással elkészüljön a köveget.

c) Az 5-féle oszlop szoros egymás mellé zárásával (Laci és Marci eljárásával egyformán) „félíg bővös” kövegetet kapnánk, a sorok és oszlopok összege megfelelő lenne, az átlóké nem. Ha viszont az oszlopokat a 3. ábra XVI–XX. oszlopoi szerint rendeznénk át, akkor egyetlen legurításban bővös kövegetnyomtató bélyegzőt kapnánk.