I. megoldás. Az adott számot így alakíthatjuk:

$$\sqrt{2\sqrt{3}-3}=\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}\left(4-2\sqrt{3}\right)}=\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt{3}-1\right)^2}=$$
$$=\left(\sqrt{3}-1\right)\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}}}=\sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{4}}}-\sqrt[4]{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{\frac{27}{4}}-\sqrt[4]{\frac{3}{4}},$$

és ezt kellett megmutatnunk. A kérdéses racionális számok $a=27/4$, $b=3/4$.

II. megoldás. Azt kell belátnunk, hogy a

$$\sqrt{2\sqrt{3}-3}=\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b} \tag{3}$$

egyenletnek van racionális megoldása. Négyzetreemeléssel

$$2\sqrt{3}-3=\sqrt{a}+\sqrt{b}-2\sqrt[4]{ab}. \tag{4}$$

Próbáljuk meg, van-e megoldás a következő szétválasztással:

$$\begin{gathered}\sqrt{a}+\sqrt{b}=2\sqrt{3},\\ 2\sqrt[4]{ab}=3,\qquad \text{azaz}\qquad \sqrt{ab}=9/4.\end{gathered} \tag{5}$$

Innen $\sqrt{a}$ és $\sqrt{b}$ a következő egyenlet gyökei:

$$t^2-2\sqrt{3}t+\frac{9}{4}=0,\qquad \text{azaz}\qquad t_1=\frac{\sqrt{3}}{2},\quad t_2=\frac{3\sqrt{3}}{2},$$

és mivel (3) mindkét oldala pozitív, $a>b$, azért

$$\sqrt{a}=t_2,\qquad a=t_2^2=\frac{27}{4},\qquad b=\frac{3}{4},\ \text{racionális számok.}$$

Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

Gulyás Imre (Budapest, Piarista gimn., III. o. t.)

Megjegyzés. Célhoz érünk az ismert[1]

$$\sqrt{A-\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}-\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}$$

azonosság alapján is, ezt az (1)-nek

$$\sqrt{2\sqrt{3}-3}=\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

átalakításában adódott második tényezőre alkalmazva, ugyanis $A=2$, $B=3$ esetén $A^2-B=1$, teljes négyzet.

Tóth Ágnes (Budapest, Berzsenyi D. gimn., I. o. t.)

[1] Lásd pl. *Faragó László:* Matematika szakköri feladatgyűjtemény, 3. kiadás, Középiskolai Szakköri Füzetek, Tankönyvkiadó, Budapest, 1963, 14. o. 80. feladat.