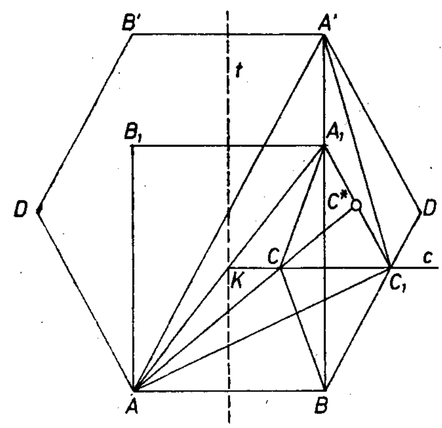
Megmutatjuk, hogy az ABC háromszög kerülete akkor a legnagyobb, ha C az $ABDA'B'D' = H$ hatszög AB-vel párhuzamos $A'B'$ oldalának valamelyik végpontjában van. Mivel az AB oldal rögzített, elég az $AC + CB$ összeget vizsgálnunk; azt akarjuk tehát megmutatni, hogy

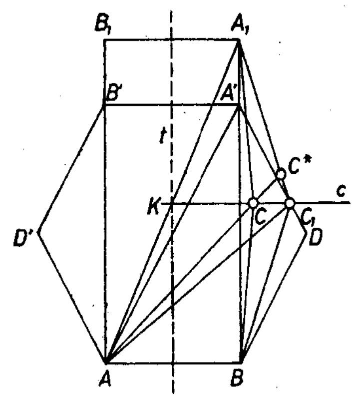
$$AC + CB < AA' + A'B', \tag{1}$$

és egyenlőség csak akkor van, ha C az A', B' pontok egyikével azonos. A szimmetria miatt elég azokra a C pontokra szorítkozni, amelyek a H idom AB-re merőleges t tengelyének B-t tartalmazó partján, vagy a tengelyen vannak.

Megoldásunk során a C pontot tetszőleges helyzetből kiindulva alkalmas mozgatással átvisszük az A' pontba úgy, hogy közben az $AC + CB$ összeg fokozatosan növekedjék (ill. sohase csökkenjen). Legyen c a C-n átmenő, AB-vel párhuzamos egyenes, és messe ez a BDA' törött vonalat a C_1 pontban. A C pontot előbb c mentén C_1-be, majd a BDA' törött vonal mentén A'-be mozgatjuk el.

Tükrözzük az A, B pontokat c-re, kapjuk rendre a B_1, A_1 pontokat.





Az ABA_1B_1 négyszögnek c és t szimmetriatengelye, e négyszög tehát téglalap, és az AA_1 átló átmegy a tengelyek K metszéspontján. Mivel C a KC_1 szakaszon van, az AC egyenes metszi az AC_1A_1 háromszög A_1C_1 oldalát, legyen e metszéspont C^*. Ha C^* az A_1C_1 szakasz belső pontja, az A_1CC^*, AC^*C_1 háromszögekre felírt háromszög-egyenlőtlenségek alapján

$$AC + CA_1 < AC + CC^* + C^*A_1 = AC^* + C^*A_1 < AC_1 + C_1C^* + C^*A_1 =$$
$$= AC_1 + C_1A_1.$$

Ha C^* azonos az A_1 ponttal, akkor az első egyenlőtlenség helyett egyenlőség áll, de a második egyenlőtlenség érvényes; ha pedig C^* a C_1 ponttal azonos – azaz C és C_1 azonosak –, akkor mindkét egyenlőtlenség helyén egyenlőség áll. A tükrözés miatt $CA_1 = CB$, $C_1A_1 = C_1B$, így

$$AC + CB \leqq AC_1 + C_1B, \tag{2}$$

ahol egyenlőség csak akkor áll, ha C és C_1 azonosak.

Mivel AA' a H köré írható kör átmérője, $AA' \geqq AC_1$, és egyenlőség csak $C_1 = A'$ mellett áll. Az $A'BC_1$ háromszögben C_1-nél tompaszög van, hiszen ez a szög nagyobb a $120°$-os $A'DB\sphericalangle$-nél; így $A'B > C_1B$, ha C_1 nem azonos A'-vel. Ezek alapján

$$AC_1 + C_1B \leqq AA' + A'B, \tag{3}$$

ahol egyenlőség csak akkor van, ha C_1 és A' azonosak. (2) és (3) együtt a bizonyítandó (1) egyenlőtlenséget adja, állításunk bizonyítását befejeztük.