I. Megoldás. *a)* Az első kifejezés értelmezve van a valós számok körében, ha y bármilyen pozitív, negatív szám, vagy 0, továbbá $x \geqq y^2$. Így ugyanis a nagy négyzetgyökjelek alatt álló számok sem negatívok, hiszen mindegyik egy–egy valós szám négyzete:

$$x \pm 2y\sqrt{x-y^2} = (x-y^2) \pm 2y\sqrt{x-y^2} + y^2 = \left(y \pm \sqrt{x-y^2}\right)^2.$$

Ennélfogva kifejezésünk így írható:

$$K = \left|y+\sqrt{x-y^2}\right| + \left|y-\sqrt{x-y^2}\right|.$$

Észrevesszük azt is, hogy y helyére $-y$-t írva K értéke változatlan marad, hiszen csupán fölcserélődik két tagjának értéke; más szóval: K csupán $|y|$-étől függ. Mármost $|y|$ és $\sqrt{x-y^2}$ nagyságviszonya szerint K értéke kétféleképpen alakulhat:

I. ha $\sqrt{x-y^2} \leqq |y|$, azaz ha $x \leqq 2y^2$ (és $x \geqq y^2$), akkor

$$K = \left(|y|+\sqrt{x-y^2}\right) + \left(|y|-\sqrt{x-y^2}\right) = 2\cdot|y|;$$

ha pedig

II. $|y| < \sqrt{x-y^2}$, azaz ha $x > 2y^2$, akkor

$$K = \left(|y|+\sqrt{x-y^2}\right) + \left(\sqrt{x-y^2}-|y|\right) = 2\sqrt{x-y^2}.$$

Más szóval K az $|y|$ és $\sqrt{(x-y^2}$ kifejezések nagyobbikának 2-szeresével egyenlő.

b) A második kifejezés minden (valós) x, y, z szám esetén értelmezve van. Az N nevező négyzetét kifejtve

$$N^2 = (1+x^2)(1+y^2)(1+z^2) = 1 + (x^2+y^2+z^2) + (x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2) + x^2y^2z^2.$$

A két zárójeles kifejezés a föltevés alapján így alakítható át:

$$x^2+y^2+z^2 = (x+y+z)^2 - 2(xy+yz+zx) = (x+y+z)^2 - 2,$$
$$x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2 = (xy+yz+zx)^2 - 2(xy^2z+xyz^2+x^2yz) = 1 - 2xyz(x+y+z),$$

ennélfogva

$$N^2 = (x+y+z)^2 - 2xyz(x+y+z) + x^2y^2z^2 = (x+y+z-xyz)^2,$$
$$L = \frac{2xyz}{|x+y+z-xyz|}.$$

Fodor Péter (Szeged, Ságvári E. Gyak. Gimn., I. o. t.)

II. megoldás *a b)* kifejezésre. Célhoz érhetünk úgy is, hogy a feltételi összefüggésből az egyik változót kifejezzük és L-be helyettesítjük; pl.

$$z = \frac{1-xy}{x+y}. \tag{1}$$

Itt a nevező nem lehet 0, azaz $y \neq -x$, mert különben a feltevés szerint $-x^2 = 1$ kellene hogy legyen, ami pedig lehetetlen. (1) alapján

$$1+z^2 = \frac{(x+y)^2+(1-xy)^2}{(x+y)^2} = \frac{x^2+y^2+1+x^2y^2}{(x+y)^2} = \frac{(1+x^2)(1+y^2)}{(x+y)^2},$$

így

$$L = \frac{2xy(1-xy)}{(x+y)\cdot\dfrac{(1+x^2)(1+y^2)}{|x+y|}} = \varepsilon\cdot\frac{2xy(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)},$$
$$x+y \neq 0,$$

ahol $\varepsilon = 1$ vagy -1 aszerint, hogy $x+y$ pozitív vagy negatív.

Megjegyzések. 1. Meg lehet mutatni, hogy a *b)* részben $x+z$ és $y+z$ ugyanolyan előjelű, mint $x+y$.

2. Az előjel meggondolásának szükségessége abból is adódik, hogy a feltevés az x, y, z számhármassal együtt a $-x$, $-y$, $-z$ számhármasra is teljesül, viszont L értéke ugyanezzel a helyettesítéssel a -1-szeresére változik.