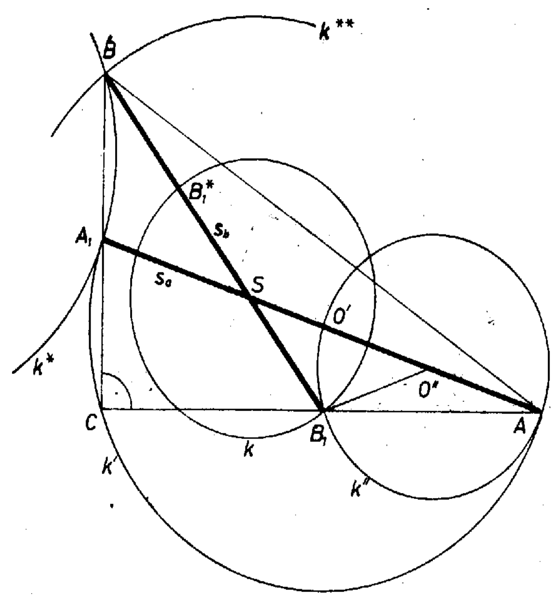
I. megoldás. Legyen a keresett háromszög derékszögének csúcsa C-nél, a CA, CB befogók felezőpontja B_1, ill. A_1, és $AA_1 = s_a$, $BB_1 = s_b$ az előírt súlyvonalak (1. ábra).



1. ábra

AA_1 helyzetét tetszés szerint megválasztva. B_1 helyzetét két mértani helyből határozzuk meg. Az S súlypont – harmadoló tulajdonságánál fogva – kitűzhető, s ekkor B_1 rajta van az S körül $s_b/3$ sugárral írt k körön. Másrészt C az AA_1 átmérő fölötti, O' középpontú k' Thalész-kör pontja, ezért B_1 azon a k'' körön is rajta van, amelyet k'-ből kapunk az A középpontú, $1/2$ arányú kicsinyítéssel.

B_1 ismeretében C-t k'-ből kimetszi az AB_1 félegyenes, végül B a C-nek tükörképe az A_1 pontra nézve.

Az így kapott ABC háromszög megfelel az előírásoknak, mert $ACB\sphericalangle = ACA_1\sphericalangle$, derékszög, $AA_1 = s_a$ súlyvonal és S a súlypont, végül mivel B_1 felezi az AC befogót, BB_1 is súlyvonal, így átmegy S-en, és $BB_1 = 3 \cdot SB_1 = s_b$.

k és k'' általában 2 pontban metszik egymást, de a B_1 helyzetére így adódó pontok egymás képei az AA_1 tengelyre nézve, így legfeljebb 1 megoldása van a feladatnak. k''-nek O'' középpontjára fennáll $AO'' = AO'/2 = s_a/4$. Az S, O'', B_1 pontok valódi háromszöget alkotnak, ha

$$SO'' - B_1O'' < SB_1 < SO'' + O''B_1,$$

azaz $O''O' = O''B_1 = O''A$ figyelembevételével

$$SO' < SB_1 < SA, \quad \frac{s_a}{6} < \frac{s_b}{3} < \frac{2s_a}{3}, \quad \frac{s_a}{2} < s_b < 2s_a. \tag{1}$$

(A szimmetria miatt hasonló feltétel várható s_a két korlátjára; valóban a feltétel első feléből $s_a < 2s_b$, a másodikból $s_a > s_b/2$.)

Megjegyzés. B a B_1 pontból úgy is kiadódik, ha ezt előbb S-re tükrözzük (B_1^*), majd S-ből a 2-szeresére nagyítjuk. Ez adja a fenti szerkesztés következő változatát: k' tükörképe A_1-re k^*, az S körüli $2s_b/3$ sugarú kör k^{**}, és ekkor B a k^* és k^{**} metszéspontja.

Iglói Ferenc (Szeged, Radnóti M. Gimn., I. o. t.)

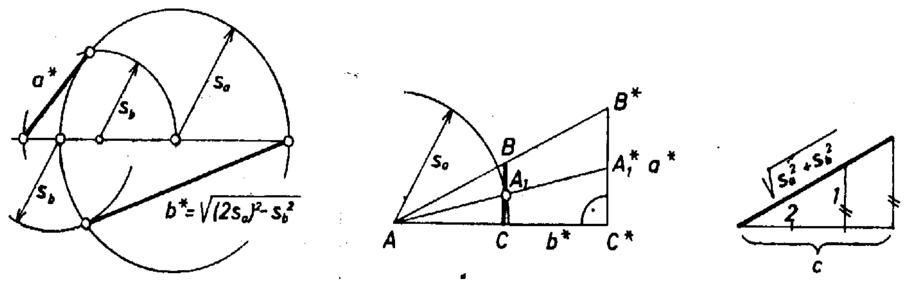
II. megoldás (vázlat). A keresetthez hasonló háromszöget szerkeszthetünk egyszerű számítás alapján, ezt azután a kívánt nagyságra transzformáljuk. A szokásos jelölésekkel

$$s_a^2 = \frac{a^2}{4} + b^2, \quad s_b^2 = \frac{b^2}{4} + a^2,$$

ezekből

$$a^2 = \frac{4}{15}(4s_b^2 - s_a^2), \quad b^2 = \frac{4}{15}(4s_a^2 - s_b^2), \tag{2}$$

$$a : b = \sqrt{4s_b^2 - s_a^2} : \sqrt{4s_a^2 - s_b^2}.$$



2. ábra

A szerkesztést a 2. ábra vázolja. A négyzetgyökök szerkeszthető voltának feltétele azonos (1) aláhúzott részével. Itt nincs szükség harmadolásra.

Megjegyzések. 1. Kissé hosszabb a következő eljárás. (2) felhasználásával

$$c^2 = a^2 + b^2 = \frac{4}{5}(s_a^2 + s_b^2), \quad c = \sqrt{\frac{2^2}{1^2 + 2^2}} \cdot \sqrt{s_a^2 + s_b^2}, \tag{3}$$

vagyis az s_a, s_b befogókkal meghatározott derékszögű háromszög átfogóját egy 1 és 2 befogókkal szerkesztett derékszögű háromszög felhasználásával kicsinyítve megkapjuk c-t, ebből az ABS háromszöget, és azt kiegészítjük. A

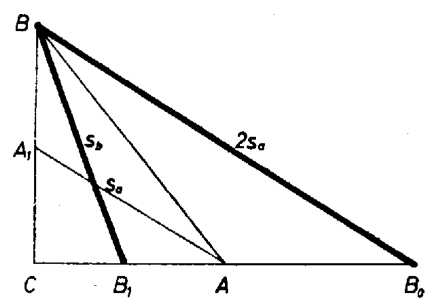
$$\frac{2}{3}|s_a - s_b| < 2\sqrt{\frac{s_a^2 + s_b^2}{5}} < \frac{2}{3}(s_a + s_b)$$

feltétel első fele mindenesetre teljesül, a második fele pedig akkor, ha

$$2s_a^2 - 5s_a s_b + 2s_b^2 = (2s_a - s_b)(s_a - 2s_b) < 0.$$

Backhausz Beáta (Budapest, Ságvári E. Gyak. Gimn., III. o. t.)

2. A keresett háromszöghöz hasonlót szerkeszthetünk a következők alapján is (3. ábra).



3. ábra

A B-ből A_1A-val párhuzamosan húzott egyenes esse CA-t B_0-ban. Ekkor $CB_0 = 2CA = 4CB_1$, és $BB_0 = 2A_1A = 2s_a$. Ennek alapján egy derékszög egyik szárára CB_1^*, $CA^* = 2CB_1^*$ és $CB_0^* = 4CB_1^*$ távolságot mérünk, majd megszerkesztjük a másik szárnak azzal az Apollóniosz-körrel való B^* metszéspontját, amelynek pontjaira a B_1^*-től és B_0^*-tól való távolságok aránya $s_b : 2s_a$. Végül az A^*B^*C háromszöget kellően nagyítjuk vagy kicsinyítjük.