A továbbiakban, ha 2 pont közti körívet említünk más megjelölés nélkül, akkor ezen a rövidebb ívet értjük. Az $\ddot{O}$ szabályos ötszög, ill. a H szabályos hétszög két szomszédos csúcsa közti ívet $\ddot{O}$-ívnek, ill. H-ívnek nevezzük. – Bármelyik $\ddot{O}$-íven van csúcsa H-nak, mert – a kör kerületét p-vel jelölve – az $\ddot{O}$-ív hossza $p/5$, a H-ívé $p/7$,

$$\frac{p}{7} < \frac{p}{5} \qquad \left(< \frac{p}{2}\right), \tag{1}$$

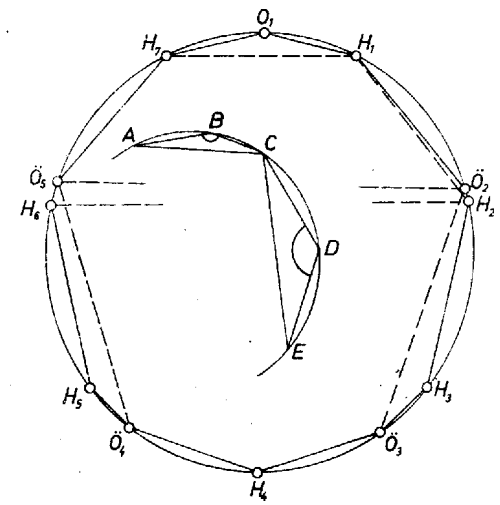
nem lehet tehát, hogy egy H-ív magába zárjon egy $\ddot{O}$-ívet. Másrészt egy $\ddot{O}$-íven H-nak legföljebb két csúcsa lehet, mert 3 egymás utáni H-csúcs 2 H-ívet ad, és

$$2 \cdot \frac{p}{7} > \frac{p}{5}$$

miatt egy $\ddot{O}$-ív nem zárhat magába két, egymás utáni H-ívet.

Így $\ddot{O}$-nek 3 ívén 1–1 csúcsa van H-nak, 2 ívén pedig 2–2 csúcsa. Az utóbbi két $\ddot{O}$-ív nem szomszédos; ha ugyanis egymás utániak volnának, a rajtuk levő 4 H-csúcs 3 egymás utáni H-ívet adna, márpedig

$$3 \cdot \frac{p}{7} > 2 \cdot \frac{p}{5}.$$



Választhatjuk ezek alapján $\ddot{O}$ és H csúcsainak indexelését úgy, hogy az $\ddot{O}_2\ddot{O}_3$ és $\ddot{O}_4\ddot{O}_5$ íveken legyen 2–2 H-csúcs, H_1 az $\ddot{O}_1\ddot{O}_2$ íven legyen, és az indexek ugyanabban a forgásirányban növekedjenek. Így a kérdéses T tizenkétszög egymás utáni csúcsai $\ddot{O}_1$, H_1, $\ddot{O}_2$, H_2, H_3, $\ddot{O}_3$, H_4, $\ddot{O}_4$, H_5, H_6, $\ddot{O}_5$, H_7.

T két szöge helyett elég összehasonlítanunk azt a két húrt, melynek végpontjai T-nek a szög csúcsával szomszédos csúcsai. Pl. a $H_7\ddot{O}_1H_1$ és $H_1\ddot{O}_2H_2$ szögek esetében $H_7H_1 = H_1H_2$, mint H oldalai, így a körnek a két szög szárai közti – félkörnél nagyobb – $H_7H_2H_1$ és $H_1H_7H_2$ ívei egyenlők, ezért a mondott két szög is egyenlő, hiszen a mondott íveken nyugvó kerületi szögek. Ugyanígy T-nek mindegyik $\ddot{O}_1 (i = 1, 2, 3, 4, 5)$ csúcsnál levő szöge ugyanakkora.

Általában hasonlóan, ha A, B, C, D, E egy félkörnél kisebb körívnek egymás utáni pontjai, és $AC < CE$, akkor $ABC\sphericalangle > CDE\sphericalangle$, mert az ABC ív kisebb a CDE ívnél, így a B-t nem tartalmazó AC ív nagyobb, mint a D-t nem tartalmazó CE ív. Ha pedig $AC = CE$, akkor ugyanígy $ABC\sphericalangle = CDE\sphericalangle$.

Eszerint T-ben a H_1, H_4, H_7 csúcsoknál is egyenlő szögek vannak, továbbá pl. $\ddot{O}_1H_1\ddot{O}_2\sphericalangle < H_7\ddot{O}_1H_1\sphericalangle$, mert (1)-ből $\ddot{O}_1\ddot{O}_2 > H_7H_1$. Hátra vannak a H_2, H_3, H_5, H_6 csúcsnál levő szögek. Mindezek az előbbi kétféle szögnagyságtól különböző, és nagyságra nézve közéjük eső szögek, mert pl. $\ddot{O}_2H_3$ és $H_2\ddot{O}_3$ a H_2H_3-nál nagyobb, $\ddot{O}_2\ddot{O}_3$-nál viszont kisebb (tehát félkörnél is kisebb) ívek, ezért ugyanez áll a végpontjaik közti húrokra is.

Továbbá e 4 szög egymástól is különböző. A $H_2\sphericalangle$-et a többi három bármelyikével egyenlőnek véve ellentmondásra jutunk. $H_2\sphericalangle = H_3\sphericalangle$ esetén $\ddot{O}_2$ és H_3, valamint $\ddot{O}_3$ és H_2 egyenlő húrok és ívek végpontjai, az utóbbiakból közös részüket, a H_2H_3 ívet elhagyva $\ddot{O}_2H_2$ és $\ddot{O}_3H_3$ is egyenlő ívek, így pedig az $\ddot{O}_2\ddot{O}_3$ és H_2H_3 húrok párhuzamosak, és közös felező merőlegesük $\ddot{O}$-nek és H-nak közös szimmetriatengelye, a föltevéssel ellentétben. (Egyszersmind a szemben levő $\ddot{O}_5$ és H_6 egybeesnék.) Ugyanígy adódik $H_5\sphericalangle = H_6\sphericalangle$-ből $H_5H_6 \| \ddot{O}_4\ddot{O}_5$.

Hasonlóan a $H_2\sphericalangle = H_6\sphericalangle$ föltevésből (és $H_3\sphericalangle = H_5\sphericalangle$-ből is) $\ddot{O}_2H_3 = \ddot{O}_5H_5$, $\ddot{O}_2H_2 = \ddot{O}_5H_6$, $H_2H_6 \| \ddot{O}_2\ddot{O}_5$ következnék.

Végül a $H_2\sphericalangle = H_5\sphericalangle$ (és $H_3\sphericalangle = H_6$) föltevésből $\ddot{O}_2H_3 = \ddot{O}_4H_6$ mindkét oldalhoz hozzáadva a köztük levő $H_3\ddot{O}_4$ ívet, $\ddot{O}_2\ddot{O}_4 = H_3H_6$, azaz $2p/5 = 3p/7$ következik, ami nem igaz.

Mindezek szerint T szögei között 6 különböző érték fordul elő.

Bauer Katalin (Budapest, Berzsenyi D. g. II. o. t.)
Sándor Péter (Pannonhalma, Bencés g. I. o. t.)