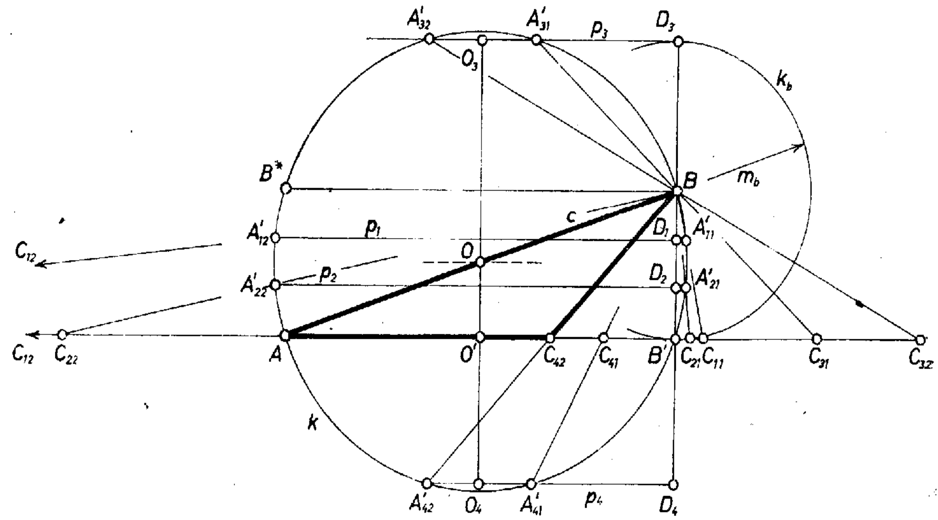
I. Legyen az A és B csúcsból kiinduló magasság talppontja A', ill. B'. Mindkettő rajta van az AB oldalszakasz, mint átmérő fölé írt k Thalész-kör kerületén. Másrészt B' a B körül m_b sugárral írt k_b körnek is pontja, ez metszi ki B'-t k-ból.

Húzzunk párhuzamost A'-n át az AC oldalegyenessel, és messe ez a BB' magasságegyenest D-ben. Ekkor, mivel az $A'BB'$ szög száraiból a párhuzamos $B'C$, DA' egyenesek által kimetszett megfelelő szakaszok aránya egyenlő, D-re ugyanaz áll, ami A'-re: a BB' szakasz egyik végpontjától kétszer akkora távolságra van, mint a másiktól.

2. Ezek alapján a szerkesztés a következő: a tetszés szerinti fölvett $AB = c$ szakasz mint átmérő fölött megrajzoljuk a k Thalész-kört. Ebből a B körüli, m_b sugarú k_b körrel kimetsszük B'-t. (Elég venni az egyik metszéspontot, mert az első lépés után ábránk még szimmetrikus az AB egyenesre, mint tengelyre.) Szerkesztünk a BB' egyenesen egy olyan D pontot, melyre $DB' = 2 \cdot DB$ vagy $DB = 2 \cdot DB'$. Ezután D-n át p merőlegest húzunk BB'-re, ennek k-val való metszéspontja A', végül kimetsszük BA'-vel az AB' egyenesből a C csúcsot.



3. Az ABC háromszög megfelel a feladat követelményeinek, mert $AB = c$; továbbá mert Thalész tétele miatt BB' merőleges AC-re, és $BB' = m_b$; végül mert egyrészt DA' párhuzamos AC-vel, hiszen mindkettő merőleges BB'-re, így A'-nek a B, C pontoktól mért távolságaira ugyanaz áll, mint D-nek B-től és B'-től mért távolságaira, vagyis amit a feladat kívánt, másrészt ismét Thalész tétele miatt $AA' \perp BA' \equiv BC$, vagyis AA' az A-ból kiinduló magassága a háromszögnek.

4. A k kör mindenesetre megszerkeszthető; B' akkor és csak akkor jön létre, ha $c \geq m_b$. Amennyiben D a BB' húr belső pontja, azaz ha k belsejében van, A' és C mindig létrejön, mert p metszi k-t, C pedig azért, mert BA' nem lehet párhuzamos az A-n át BB'-re állított merőlegessel, azaz nem azonos a B-n át BB'-re állított BB^* merőlegessel, hiszen ilyenkor D és A' közte van e két merőlegesnek. A BB' húron levő D pontból 2 megoldást kapunk az ABC háromszögre, mert p két különböző pontban metszi k-t.

A BB' egyenesen 4 pont felel meg a B-től és B'-től előírt távolsági aránynak: a BB' szakasz D_1, D_2 harmadoló pontjai, melyekre $BD_1 = D_1D_2 = D_2B'$, továbbá B'-nek B-re való D_3 tükörképe és B-nek B'-re való D_4 tükörképe. Az utóbbi kettő kívül van k-n, így a rajtuk át fektetett p_3, ill. p_4 merőleges nem mindig metszi k-t. $BB' \perp AB'$ miatt p_4 a p_3 tükörképe a BB' szakasz felező merőlegesére nézve, ami átmegy k-nak O középpontján. Legyen O vetülete AB'-re, p_3-ra, p_4-re rendre O', O_3, ill. O_4, ekkor $OO' = BB'/2 = m_b/2$, $O'O_4 = B'D_4 = m_b$, tehát $OO_4 = 3m_b/2$. Eszerint p_3-on és p_4-en akkor adódik két-két metszés k-val (A'_{31}, A'_{32}, A'_{41}, A'_{42}), ha O_3 és O_4 a k belsejében van, $OO_4 < OA$, azaz $m_b < c/3$. Ekkor 8 a követelménynek megfelelő háromszöget kapunk; $m_b = c/3$ esetén p_4 és p_3 érinti k-t, a megoldások száma 6; ha $c/3 < m_b < c$, akkor 4; $m_b = c$ esetén 2, mert ekkor pl. A'_{11} és A'_{12} egymás tükörképe AB-re; végül $m_b > c$ esetén nincs a követelményeknek eleget tevő háromszög.

Angster Judit (Pécs, Nagy Lajos g. II. o. t.)

Megjegyzés. Akár a leírt szerkesztésből, akár a fenti eredmények alkalmazásából látjuk, hogy az I. osztályosok részére közölt számadatokkal $m_b = 24$ esetén 8 megoldás van, $m_b = 30$ esetén 6, végül $m_b = 36$ esetén 4.