*a)* Legyen a két törtszám $x$ és $y$, a második követelményben szereplő pozitív egész számok pedig $A$ és $B$, vagyis

$$x = A\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{70}\right) = \frac{4}{35} \cdot A, \quad y = \frac{4}{35} \cdot B. \tag{1}$$

Ekkor az első követelmény szerint

$$x + y = \frac{4}{35}(A + B) = 8,$$

$$A + B = 70. \tag{2}$$

Számaink sorrendjére nem vagyunk tekintettel, így elég azokat a megoldásokat keresnünk, amelyekben pl. $x \le y$, vagyis $A \le B$. Ekkor $A$ fölveheti az 1, 2, …, 35 értékeket, $B$ értéke pedig rendre $70 - A = 69, 68, \ldots, 35$. Így (1) szerint 35 a követelményt kielégítő $x$, $y$ tört-pár van. Nem zártuk ki az $A = B = 35$ értéket, amikor $x = y = 4$, mert az egész számok is a törtek közé tartoznak. Megfelelnek pl.

$$A = 1 \quad \text{esetén} \quad \frac{4}{35} \quad \text{és} \quad \frac{276}{35}; \qquad A = 20 \quad \text{esetén} \quad \frac{16}{7} \quad \text{és} \quad \frac{40}{7}.$$

*b)* Az újabb követelmény az előbbi kettőhöz csatlakozik, ennélfogva a megoldásokat a fentiek közül válogathatjuk ki, pl. a fenti második számpélda két tagja a $\frac{8}{7}$ áltörtnek 2-szerese, ill. 5-szöröse, tehát megfelel.

Legyen a kérdéses áltört $r(> 1)$, és

$$x = C \cdot r, \quad y = D \cdot r,$$

ahol $C$ és $D$ az 1-nél nagyobb természetes számok. Ekkor egyrészt

$$x + y = (C + D)r = 8, \tag{3}$$

$$C + D = \frac{8}{r} < 8,$$

másrészt

$$\frac{x}{y} = \frac{A}{B} = \frac{C}{D} = \frac{a}{b},$$

itt $\frac{a}{b}$ az $\frac{A}{B}$ és $\frac{C}{D}$ törtek legegyszerűbb alakja, $A = k \cdot a$, $B = k \cdot b$, és $k$ az $A$, $B$ számok legnagyobb közös osztója, továbbá $C \ge a$, $D \ge b$.

Ezeket (2)-be és (3)-ba beírva

$$k(a + b) = 70, \qquad a + b = \frac{70}{k} \le C + D < 8,$$

tehát $k$ a $\frac{70}{8}$-nál nagyobb természetes szám, és osztója 70-nek. Mivel még $k \le ka = A \le 35$, azért $k$ csak 10, 14 és 35 lehet, továbbá $a \le \frac{35}{k}$.

Ezek szerint $k$, majd $a$ értékét megválasztva $A$, $B$, $b$ és $a + b$ szóba jövő értékeire a következőket kapjuk:

| | I. | II. | III. | IV. | V. | VI. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $k$ | 10 | 10 | 10 | 14 | 14 | 35 |
| $a$ | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 1 |
| $A$ | 10 | 20 | 30 | 14 | 28 | 35 |
| $B$ | 60 | 50 | 40 | 56 | 42 | 35 |
| $b$ | 6 | 5 | 4 | 4 | 3 | 1 |
| $a+b$ | 7 | 7 | 7 | 5 | 5 | 2 |

Az I–V. értékrendszerekben (3) miatt $C = a$ és $D = b$, így azonban I-ben és IV-ben nem teljesül $C > 1$. A II. és III., valamint az V. értékrendszerben a kérdéses áltört

$$r = \frac{8}{C + D} = \frac{8}{7}, \quad \text{ill.} \quad \frac{8}{5}.$$

A VI. értékrendszerben $A = B$ miatt $C = D = 2$, $x$ és $y$ közös értéke 4, és ez előállítható a 2/1 áltörtből.

Mindezek szerint az újabb követelménynek eleget tevő tört-párok:

$$\frac{16}{7} \quad \text{és} \quad \frac{40}{7}, \qquad \frac{24}{7} \quad \text{és} \quad \frac{32}{7}, \qquad \frac{16}{5} \quad \text{és} \quad \frac{24}{5}, \qquad \frac{4}{1} \quad \text{és} \quad \frac{4}{1}.$$

*Kálmán Miklós* (Budapest, Fazekas M. gyak. gimn. II. o. t.)