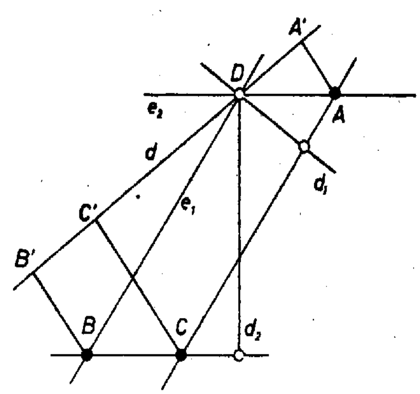
I. megoldás. Szerkesztésünket az adott három ponttal meghatározott S síkban végezzük. Legyen D a sík egy az előírt tulajdonsággal bíró pontja, és tekintsük a rajta átmenő egyenesek közül azt, amelyik merőleges az AC egyenesre; legyen ez d_1. Ekkor A és C merőleges vetülete azonos d_1 és az AC egyenes metszéspontjával, így (1) szerint $DB' = 0$. Ez azt jelenti, hogy B vetülete d_1-re D, vagyis $BD \perp d_1 \perp AC$, tehát D csak az AC-vel B-n át húzott e_1 párhuzamos egyenes valamely pontja lehet.



1. ábra

Ugyanígy adódik a D-n átmenő és BC-re merőleges d_2 egyenes felhasználásával, hogy D csak a BC-vel A-n át húzott e_2 párhuzamos egyenes pontja lehet. e_1 és e_2 különbözők, mert A, B, C háromszöget alkotnak, tehát egyetlen közös pontjuk van, az, amely az adott pontokat olyan paralelogrammává egészíti ki, melyben CD átló.

Megmutatjuk, hogy (1) teljesül bármely a D-n átmenő (S-beli) d egyenesre. Valóban, mivel BC párhuzamos, egyirányú és egyenlő DA-val, azért ugyanezek fennállnak $B'C'$ és DA' között. Így az irányokat is figyelembe véve mindig fennáll

$$DA' = B'C' = B'D + DC' = -DB' + DC',$$

amihez mindkét oldalon hozzáadva a DB' vektort, (1)-et kapjuk.

Papp Zoltán (Debrecen, Fazekas M. g. II. o. t.)

II. megoldás. Legyen ismét D egy a kívánt tulajdonsággal bíró pont, d egy rajta átmenő egyenes, továbbá $\overrightarrow{DA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{DB} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{DC} = \mathbf{c}$, és bontsuk fel az (1)-ben fellépő vektorokat 2–2 vektor összegére

$$\overrightarrow{DC}' = \mathbf{c} + \overrightarrow{CC}', \qquad \overrightarrow{DA}' = \mathbf{a} + \overrightarrow{AA}', \qquad \overrightarrow{DB}' = \mathbf{b} + \overrightarrow{BB}'.$$

Ezekkel teljesül (1), amiből átrendezéssel

$$\overrightarrow{CC}' - \overrightarrow{AA}' - \overrightarrow{BB}' = \mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c}. \tag{2}$$

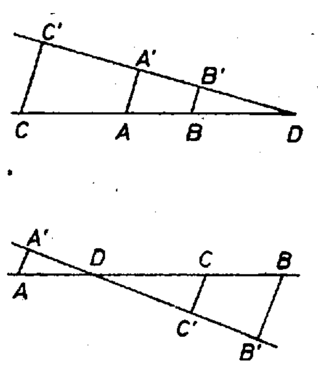
A d egyenest D körül forgatva ennek a vektoregyenlőségnek a jobb oldala állandó, a bal oldal viszont változó; hiszen mindig merőleges d-re. Ez az ellentmondás csak úgy oldódik fel, ha a bal oldal 0-vektor, csak így marad állandó, irányának megváltozása ellenére. Ekkor viszont a jobb oldalra is fennáll

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c} = \mathbf{0}, \text{ átrendezve } \mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}, \text{ azaz } \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB}.$$

Ezt a bármely D pontra fennálló $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC}$ egyenlőségekkel egybevetve D csak olyan pont lehet, melyre $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{BC}$ és $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AC}$, vagyis $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB}$ és $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CA}$, tehát D az A, C, B pontokat paralelogrammává kiegészítő pont, ha a paralelogrammában CD, AB az átlók.

Csobádi Péter (Budapest, Berzsenyi D. g. II. o. t.)

Megjegyzések. 1. Szerkesztésünk akkor is érvényes, ha A, B, C egy egyenesbe esnek, ekkor azonban (1) lényegében semmitmondó (2. ábra).



2. ábra

2. Akkor is érvényes (1), ha mindhárom pont vetítése egymással párhuzamosan történik a felvett egyeneshez tetszés szerinti szöggel hajló irányban.

3. Be lehet látni, hogy bizonyításunk a D-n átmenő, de nem az ABC síkban fekvő egyenesekre is érvényes.