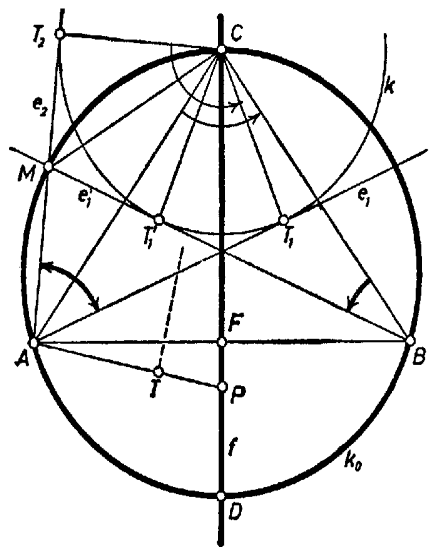
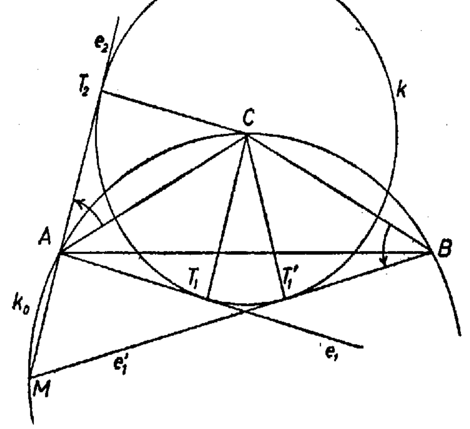
Legyen az ABC háromszögben $AC = BC$, AB felezőpontja F, egy a C körül $r = CA$ sugárral írt kör k. Ez az alakzat szimmetrikus az AB alap f felező merőlegesére nézve, így k-nak A-ből és B-ből húzott érintői egymásnak az f tengelyre vonatkozó tükörképei. $r = CA$ esetén csak egy-egy érintő húzható ($r > CA$ esetén a kérdés tárgytalan).





A tükrös érintőpárok f-en metszik egymást, ill. az egyik pár párhuzamos, ha $r = AF$, ha pedig $r = CF$, akkor egy érintőpár egybeesik. $CF = AF$ esetén a két kivételes eset egyszerre jön létre.

Fordítva, f-nek minden, az F-től és C-től különböző P pontja a mértani helyhez tartozik, ti. akkor adódik P, amikor $r = CT$, ahol T a C-nek PA-n levő vetülete; ekkor ugyanis $CT \leq CA$, másrészt PA nem azonos f-re vett PB tükörképével, így P valóságos metszéspont. F a fenti 2. eset miatt nem felel meg P-ként, $P = C$ viszont $r = 0$-ra vezetne.

Legyen most $r < CA$, így az A-ból k-hoz húzott e_1, e_2 érintők különbözők, legyen érintési pontjuk T_1, ill. T_2, az e_1-nek f-re való tükörképe e_1' – ez átmegy B-n és T_1'-ben érinti k-t –, végül e_2 és e_1' metszéspontja M. Megmutatjuk, hogy M rajta van az ABC háromszög köré írt k_0 körön.

Forgassuk el az ábrát C körül úgy, hogy A képe B legyen. Ekkor e_2 képe e_1', ugyanis e_2 abba a B-ből húzott érintőbe megy át, amibe ugyanolyan forgatás viszi át BC-t, mint amilyennel AC átvihető e_2-be. De e_2-t e_1'-be az AC-re, majd f-re való tükrözéssel is átvihetjük; ezek során AC helybenmarad, majd BC-be megy át, az őt e_2-be vivő forgás nagysága nem változik, a forgás iránya pedig kétszer az ellenkezőjére változik, így az AC-t e_2-be és BC-t e_1'-be vivő (egyik) forgás irányra is megegyezik. Mivel T_2-t a forgatás T_1'-be viszi át, így tehát a $T_2AC\sphericalangle$ és $T_1'BC\sphericalangle$ egyenlő, forgási irányra nézve is.

Ha M az AB egyenes ugyanazon oldalán van, mint C, akkor MC A-ból és B-ből egyenlő szögben látszik, ha pedig M és C az AB egyenes ellenkező oldalán van, akkor az $ACBM$ négyszög A és B csúcsának egyikénél levő belső szög a másiknál levő külső szöggel egyenlő. A négyszög tehát húrnégyszög. Így M mindkét esetben rajta van az ABC háromszög köré írt körön, k_0-on. Ez nyilvánvalóan igaz akkor is, ha M egybeesik A-val, ill. B-vel ($r = CF$).

Fordítva, k_0 bármely M pontja az utóbbi módon hozzátartozik a keresett mértani helyhez, kivéve C-t. Ugyanis az MA, MB egyenesek közti egyik szög felezője az MC egyenes, hiszen C felezi k_0-nak A és B közti egyik ívét. Eszerint van olyan C közepű k kör, melynek érintői MA és MB. Nyilvánvalóan maga az A és B pont is hozzátartozik a mértani helyhez; a C-vel átellenes D pont ezen az úton nem adódik ki ($r = CA$ esetén csak egy-egy érintő van, és ezek egymás képei f-re), viszont f révén hozzátartozik a mértani helyhez.

Mindezek szerint a keresett mértani helyet k_0 és f alkotja a C és F pont kivételével.

Zambó Péter (Miskolc, Földes F. gimn. II. o. t.)
Hárs László (Budapest, Kölcsey F. gimn. II. o. t.)