I. $\sqrt{458} = 21{,}4009\ldots$, igen csekély lekerekítéssel 21,4. Megfordítva várható, hogy $21{,}4^2$ egészre kerekítve, csekély fölkerekítéssel 458-at ad. Valóban $21{,}4^2 = 457{,}96$. Mondhatjuk ezt is: 45 800 négyzetgyöke jó közelítéssel egész szám, mert 45 800 kevéssel haladja meg a $45\,796 = 214^2$ négyzetszámot.

II. Az egymás utáni négyzetszámok utolsó két jegyét egy-egy kétjegyű szám-má összeolvasva 25^2 – és minden $(25A)^2$, ahol A egész szám – átlépése után ezek a kétjegyű végződések fordított sorrendben ismétlődnek, és közülük a legnagyobb az imént fellépett 96. Valóban, nagy betűkkel továbbra is egész számot jelölve $(25B + C)^2$ és $(25B - C)^2$ kétjegyű végződése egyenlő, hiszen különbségük $100BC$, többszöröse 100-nak. Eszerint, mivel $214 = 9 \cdot 25 - 11$, azért $9 \cdot 25 + 11 = 236$ négyzete ismét 96-ra végződik: $236^2 = 55\,696$, és az is várható, hogy $\sqrt{557{,}00}$ második és harmadik tizedes jegye 0 legyen. Valóban, $23{,}6008\ldots$ adódik.

Mivel a szomszédos négyzetszámok különbsége egyre nagyobb: $(n + 1)^2 - n^2 = 2n + 1$, azért fordítva várható, hogy a szomszédos egész számok négyzetgyökének különbsége egyre kisebb. Ezért az is várható, hogy minden további, 96-ra végződő négyzetszámot követő kerek százas $1/100$ részének négyzetgyökében megismétlődik a szóban forgó tulajdonság.

A $236 = 250 - 14$-re következő ilyen alapszám $250 + 14 = 264 = 214 + 50$. Innen sejtjük, hogy minden $50A \pm 14$ alakú szám négyzete 96-ra végződik. Valóban:

$$(50A \pm 14)^2 = 2500A^2 \pm 1400A + 196 = 100(25A^2 \pm 14A + 1) + 96,$$

így várható, hogy $A \geq 5$ esetén $25A^2 \pm 14A + 2$ négyzetgyöke második és harmadik tizedes jegye 0. Néhány további ilyen szám $A = 5$-ből 627 ± 70, $A = 6$-ból 902 ± 84, valóban megfelelnek. Viszont az $A = 4$ pár kisebb tagja: $402 - 56 = 346$ még nem felel meg, négyzetgyöke $18{,}601\ldots$

III. E sorozat tagjainak négyzetgyökében akkor mindenesetre várható a 4. tizedesben is 0 jegy, ha az egymás utáni négyzetgyökök különbsége 10-szer kisebb. Ez viszont akkor várható, ha a szomszédos négyzetszámok $2n + 1$ különbsége 10-szer nagyobb, vagyis az alap 2140 körüli. Már $A = 40$ esetén a $2014^2 = 4056\,196$-ból adódó 40 562 négyzetgyöke $201{,}40009\ \ldots$

IV. A 96 után következő legnagyobb kétjegyű négyzetvégződésből, 89-ből kiindulva – ami az $50D \pm 17$ alakú számok négyzetvégződése –, csak nagyobb D értékek esetén kapunk két 0 jegyet; az elsőt $D = 11$ esetén: $567^2 = 321\,489$ és 3215 négyzetgyöke $56{,}700\,97\ \ldots$

A fentiekből az is sejthető, hogy egyre nagyobb egész számokat véve akárhány egymás utáni 0 jegyet találhatunk a 2. tizedesjegytől kezdve. Sőt, mindjárt a tizedesvessző után kezdődhet a sorozat, pl. 4 056 197, 4 056 198 és 4 056 199 esetében. A vizsgált tulajdonság tehát csak addig tekinthető érdekesnek, míg kicsi szám négyzetgyökében lép föl.

Fuggerth Endre (Budapest, Fazekas M. gyak. g. II. o. t.)