

I. Legyen a kérdéses felbontások tagjaiból képezett, az előírásnak megfelelő felsorolás (számsorozat) középső – ötödik – tagja a és a szomszédos tagok különbsége d (úgy érteve, hogy mindig pl. a később álló tagból vonjuk ki az előtte állót). Ekkor a felsorolás tagjai

$$(1) \quad a - 4d, \quad a - 3d, \quad a - 2d, \quad a - d, \quad a, \quad a + d, \quad a + 2d, \quad a + 3d, \quad a + 4d.$$

Nevezzük d együtthatóját az illető tag indexének.

A 9 tag összege $9a$, és ez egyenlő a felbontandó számok összegével, $19 + 28 + 37 = 84$ -gyel, innen $a = 28/3$. Legyen a 19, 28, 37 felbontásából eredő 3–3 tag indexének összege rendre s_1, s_2, s_3 , így e tagok összege rendre $3a + s_1d, 3a + s_2d$, ill. $3a + s_3d$, tehát

$$(2) \quad 28 + s_1d = 19, \quad 28 + s_2d = 28, \quad 28 + s_3d = 37, \quad \text{amiből}$$

$$(3) \quad s_2 = 0, \quad s_1 = -s_3 \neq 0, \quad \text{és}$$

$$(4) \quad d = 9/s_3.$$

Ezek szerint, ha a 9 indexet úgy rendezzük 3 háromtagú csoportba, hogy a 3 index összege egyik csoportban 0, egy másikban pedig 0-tól különböző – amikor persze a hátra levő csoportban az utóbbi összeg (-1) -szerese az összeg, hiszen a 9 index összege 0, – akkor a 0-tól különböző összeget s_3 -nak véve és kiszámítva (4)-ből a közös különbséget, majd (1) tagjait, (2) szerint az s_3 összegű indexhármashoz tartozó 3 tagja a felsorolásnak 37-et ad összegül, a 0-összeget adó indexhármashoz tartozók 28-at, a maradék 3 tag pedig 19-et. Pl. a

$$(5) \quad -3, 0, 3 \quad (s_2), \quad 1, 2, 4 \quad (s_3), \quad -4, -2, -1 \quad (s_1)$$

index-elrendezés megfelel (3)-nak, $d = 9/(1+2+4) = 9/7$, és a felsorolás tagjai (közös nevezőre hozva), majd számaink felbontásai:

$$(6) \quad \frac{88}{21}, \quad \frac{115}{21}, \quad \frac{142}{21}, \quad \frac{169}{21}, \quad \frac{196}{21}, \quad \frac{223}{21}, \quad \frac{250}{21}, \quad \frac{277}{21}, \quad \frac{304}{21},$$

$$(7) \quad 19 = \frac{88}{21} + \frac{142}{21} + \frac{169}{21}, \quad 28 = \frac{115}{21} + \frac{196}{21} + \frac{277}{21}, \quad 37 = \frac{223}{21} + \frac{250}{21} + \frac{304}{21},$$

Ha (5) utolsó csoportját vesszük s_3 nak, $d = -9/7$, a (6) felsorolás és a (7) felbontások tagjait fordított sorrendben kapjuk, ez azonban nem tekintendő új megoldásnak. (6)-ra vezet az indexek következőkét csoportosítása is:

$$-3, 1, 2; \quad 0, 3, 4; \quad -4, -2, -1 \quad \text{és} \quad -2, -1, 3; \quad 1, 2, 4; \quad -4, -3, 0.$$

II. A felbontások számának megállapításához nincs szükség a 9 index minden lehetséges elrendezésének felírására, elég előállítani a 0-összegű, s_2 -ként felhasználandó indexhármásokat. Könnyű belátni, hogy ezek a következők:

$$(8) \quad \begin{array}{cccc} (-4, 0, 4), & (-3, 0, 3), & (-2, 0, 2), & (-1, 0, 1), \\ (-4, 1, 3), & (-3, -1, 4), & (-3, 1, 2), & (-2, -1, 3), \end{array}$$

számuk 8. Ugyanis bármelyikükből kiindulva a második, s_3 -ként felhasználandó indexhármast – mint alább megmutatjuk – a maradék 6 indexből 20-féleképpen állíthatjuk össze, amivel az elrendezést is meghatároztuk, s_1 tagjai a föl nem használt indexek lesznek. Az így gondolható $8 \cdot 20 = 160$ csoportosítás közül azonban nem adnak megoldást, (1) alakú felsorolást azok, amelyekben $s_3 = 0$, vagyis $s_1 = s_2 = s_3 = 0$. A (8) hármasokból lényegében két ilyen csoportosítás képezhető:

$$(9) \quad \begin{array}{ccc} (-4, 0, 4), & (-3, 1, 2), & (-2, -1, 3); \\ \text{és } (-2, 0, 2), & (-4, 1, 3), & (-3, -1, 4). \end{array}$$

(A 0 index miatt (8) első sora valamelyik hármasának szerepelnie kell, viszont a $(-3, 0, 3)$ és $(-1, 0, 1)$ hármasoknak mindegyik további hármassal van közös indexe, ezért $s_1 = s_2 = s_3$ típusú elrendezésben nem léphetnek fel.) A (9) elrendezések mindegyike $3 \cdot 2 = 6$ különböző sorrendben lép fel a fenti 160 csoportosításban aszerint, hogy a 3 hármas melyike kapja s_2 , ill. s_3 szerepét: s_2 -t 3-féleképpen, s_3 -at 2-féleképpen választhatjuk.

Ezek szerint a 9 indexnek $160 - 2 \cdot 6 = 148$ elrendezésében teljesül a (3) föltétel. Ezek – a bemutatott példa szerint – páronként ugyanazt a felbontást adják a 19, 28, 37 számokra, így a kívánt felbontások száma 74.

III. Hátra van még annak belátása, hogy 6 különböző index közül valóban 20-féleképpen választhatjuk s_3 tagjait. Az első 6-féleképpen, a maradék közül a másodikat 5-, a harmadikat 4-féleképpen, és mindegyik utóbbi megválasztás az előbbieket mindegyikével összekapcsolható. Az így adódó $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ lehetőségben azonban minden egyes számhármast 6-szor vettünk figyelembe, ahány különböző sorrendben 3 különböző elem felírható – amint ezt a (9)-hez fűzött megfontolásban láttuk –, ezért a csupán sorrendi különbözőségektől eltekintve valóban $120 : 6 = 20$ a keresett szám.

IV. A 6, 72, 48 számok felbontásainak számát hasonlóan kereshetjük. Minden felsorolás középső tagja $(6 + 72 + 48)/9 = 14$. Ekkor

$$(2') \quad 42 + s_1 d = 6, \quad 42 + s_2 d = 72, \quad 42 + s_3 d = 48,$$

így (3) helyére a következő föltétel lép:

$$(3') \quad s_1 : s_2 : s_3 = (-6) : 5 : 1.$$

A legkisebb három index összege $(-4) + (-3) + (-2) = -9$, a legnagyobb háromé 9, így $|s_1|, |s_2|, |s_3| \leq 9$, ezért lényegében csak $s_1 = -6, s_2 = 5, s_3 = 1$ lehetséges, hiszen láttuk, hogy mindegyik indexösszegnek (-1) -gyel való szorzása csak sorrendi változást okoz a felbontásokban. Ekkor $d = 6$, számainkat csak a

$$(10) \quad -10, \quad -4, \quad 2, \quad 8, \quad 14, \quad 20, \quad 26, \quad 32, \quad 38$$

felsorolás számaiból állíthatjuk elő. Mármost kevés próbálgatás mutatja, hogy a következő 6 index elrendezés ad megoldást:

s_1 (6 felbontása)	s_2 (72 felbontása)	s_3 (48 felbontása)
(-4, -3, 1)	(-2, 3, 4)	(-1, 0, 2),
(-4, -3, 1)	(-1, 2, 4)	(-2, 0, 3),
(-4, -3, 1)	(0, 2, 3)	(-2, -1, 4),
(-4, -2, 0)	(-1, 2, 4)	(-3, 1, 3),
(-3, -2, -1)	(0, 1, 4)	(-4, 2, 3),
(-3, -2, -1)	(0, 2, 3)	(-4, 1, 4),

vagyis a megoldások száma 6. Pl. a negyedik sor szerint (10)-ből:

$$6 = (-10) + 2 + 14, \quad 72 = 8 + 26 + 38, \quad 48 = (-4) + 20 + 32.$$

Koren András (Budapest, I. István g. III. o. t.)

Zöldy Béla (Budapest, I. István g. II. o. t.)

Simon Júlia (Győr, Kazinczy F. g. I. o. t.)

Megjegyzés. A nem teljes és a hibás dolgozatokban gyakori, hogy a szerző többletkövetelményt állít fel. Ilyenek: a felbontás tagjai egész számok; a felsorolás *első három* tagjának összege 19, a *következő háromé* 28; mivel az első számpéldában $28 = (19 + 37)/2$, azért a másodikban is csak vagy 6, 27, 48 vagy 6, 42, 78 lehet a felbontandó számhármass. (Az utolsóknak tetszetős kiindulásával – hogy ti. 1–1 számjegy-cserével kaphatók az adott számhármassból – szemben áll, hogy ugyanaz lenne az eredmény, mint az első számpéldában, ti. 74 felbontás.) Mindezeket a feladat szövege nem támasztotta alá. Pl. az első számpéldában 9 különböző felsorolás számaiból adódhat ki 19, 28 és 37, de tagjaik közül egyetlenegy sem egész szám.