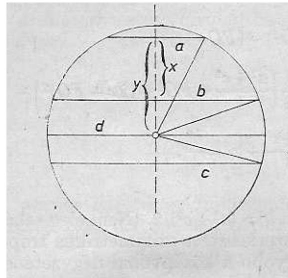
I. megoldás. 1. Ha $a=c$, akkor b átmérő és a szerkesztés magától értetődő. Ha $a\neq c$, válasszuk a betűzést úgy, hogy a két szélső húr közül a legyen a kisebbik: $a<c$ (1. ábra).



1. ábra

Ekkor c közelebb van a velük párhuzamos d átmérőhöz, mint a, ezért b mindenesetre azon a partján van d-nek, mint a. Legyen a és b közti távolság x, az a és d közti távolság y, ekkor d-től a b húr $y-x$, a c húr pedig $|y-2x|$ távolságra van. Pitagorasz tétele alapján

$$\left(\frac{d}{2}\right)^2=y^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2, \tag{1}$$

$$\left(\frac{d}{2}\right)^2=(y-x)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2, \tag{2}$$

$$\left(\frac{d}{2}\right)^2=(y-2x)^2+\left(\frac{c}{2}\right)^2. \tag{3}$$

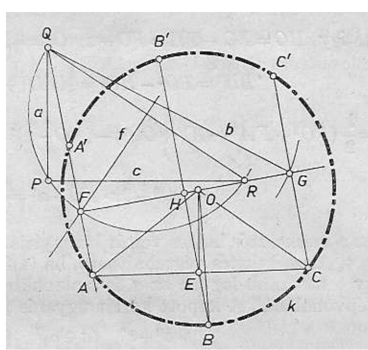
Innen y-t és d-t kiküszöbölhetjük úgy, hogy kivonjuk (1) és (3) összegéből (2) kétszeresét:

$$0=\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{c}{2}\right)^2+2x^2-2\left(\frac{b}{2}\right)^2,$$

$$2x=\sqrt{b^2-\frac{a^2+c^2}{2}}, \tag{4}$$

ekkora az a és c húr távolsága.

2. A szerkesztés a következő.



2. ábra

Egy P csúcsú derékszög (2. ábra) két szárára felmérjük $PQ=a$, ill. $PR=c$ szakaszt, a QR szakasz fölé Thalész-félkört írunk, kijelöljük rajta a szakasz f felező merőlegesén levő F pontot (f-et már a középpont szerkesztésében használtuk), az FR félegyenest metsszük a Q körüli b sugarú körrel a G pontban. Fölmérjük az FQ egyenesre az $FA=FA'=a/2$, valamint a vele párhuzamos, G-n átmenő egyenesre a $GC=GC'=c/2$ szakaszt, ekkor a keresett k kör O középpontját az AC szakasz felező merőlegese metszi ki FG-ből, sugara pedig OA.

3. A szerkesztésből nyilvánvaló, hogy AA', CC' a k-nak párhuzamos és a, ill. c hosszúságú húrja, mert merőlegesek FG-re; azt kell csak bebizonyítanunk, hogy az AC-nek E felezőpontján át velük párhuzamosan húzott – és így FA-tól és GC-től egyenlő távolságra levő – e egyenes k-ból b hosszúságú húrt metsz ki. Legyen a húr BB', felezőpontja H.

A szerkesztés szerint $QR^2 = a^2 + c^2$, QRF egyenlő szárú derékszögű háromszög, így $QF^2 = (a^2 + c^2)/2$, tehát $FG = 2x$, megfelel (4)-nek. O a HG félegyenesen van, így $HO = FO - FH = FO - x$, $OG = |2x - FO|$. Mármost

$$BH^2 = BO^2 - HO^2 = \frac{1}{2}(AO^2 + CO^2) - (FO - x)^2 =$$
$$= \frac{1}{2}(FO^2 + FA^2 + GC^2 + OG^2) - (FO - x)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{a^2 + c^2}{4} + FO^2 + (2x - FO)^2\right) -$$
$$-FO^2 + 2x \cdot FO - x^2 = \frac{a^2 + c^2}{8} + x^2 = \frac{b^2}{4},$$

és ez a szerkesztés helyes voltát bizonyítja.

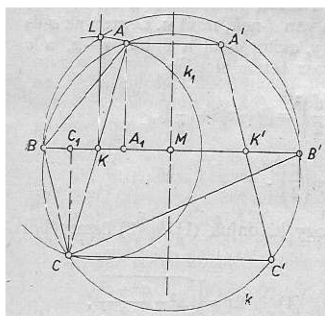
4. A szerkesztés végrehajtható, ha (4)-ben $b^2 > (a^2+c^2)/2$. (Nem elég tehát, hogy b hosszabb legyen a és c alapokból szerkesztett szimmetrikus trapéz középvonalánál. A kapott korlát ugyanis nagyobb a középvonal négyzeténél:

$$\frac{a^2 + c^2}{2} - \left(\frac{a + c}{2}\right)^2 = \left(\frac{(a - c)^2}{2} \geq 0\right).$$

A feltétel teljesülése esetén 1 megoldást kapunk.

Fuggert Endre (Budapest, Fazekas M. gyak. g. II. o. t.)

II. megoldás. 1. Legyenek a húrok rendre AA', BB', CC', és messe BB' az AC-t K-ban, $A'C'$-t K'-ben (3. ábra).



3. ábra

Az ABK és $B'CK$ háromszögek hasonlók, mert szögeik páronként egyenlők, így

(5) $$\frac{BK}{KA} = \frac{CK}{KB'} = \frac{KA}{KB'},$$
$$KA^2 = KB \cdot KB',$$

azaz KA mértani középarányos BK és KB' között. Másrészt KK' a $CC'A'A$ trapéz középvonala, és az alakzat szimmetrikus a húrok közös felező merőlegesére, mint tengelyre nézve.

2. Ezek alapján a szerkesztés a következő. A $BB' = b$ szakasz M felezőpontjától B felé fölmérjük az $MA_1 = a/2$, $MC_1 = c/2$ szakaszokat. A_1-ben és A_1C_1-nek K felezőpontjában merőlegest rajzolunk BB'-re és az utóbbit metsszük a BB' átmérő fölötti Thalesz-körrel az L pontban. Ekkor a K körüli, KL sugarú k_1 kör az előbbi merőlegesből kimetszi A-t, AK-nak k_1-gyel való másik metszéspontja C és a keresett k kör az ABC háromszög köré írt kör.

3. Bizonyításul elég azt megmutatnunk, hogy k átmegy B'-n is. Ekkor ugyanis az M-ben BB'-re állított m merőleges szimmetriatengelye k-nak, ezért A-nak és C-nek m-re vetett A', ill. C' tükörképe is rajta van k-n, AA' és CC' párhuzamosak BB'-vel, mert merőlegesek m-re, $AA' = 2\ MA_1 = a$, $CC' = 2\ MC_1 = c$ – ugyanis $CC_1 \perp BB'$, hiszen a CKC_1 háromszög egybevágó az AKA_1 derékszögű háromszöggel –, végül ugyanezért BB' egyenlő távolságra van AA'-től és CC'-től. – Állításunk abból következik, hogy $KL = KA$ az ismert mértani középarányos szerkesztés miatt teljesíti (5) jobb oldali egyenlőségét, ezért a bal oldali egyenlőség is fennáll, így a K-nál egyenlő (csúcs-) szögekkel bíró KAB, KCB' háromszögek hasonlók, $BB'C\sphericalangle = BAC\sphericalangle$.

4. A szerkesztés végrehajtható, ha $KL > KA_1$, azaz – pozitív szakaszokról lévén szó –, ha $KL^2 > KA_1^2$

$$KB \cdot KB' = \left(\frac{b}{2} - \frac{a + c}{4}\right)\left(\frac{b}{2} + \frac{a + c}{4}\right) > KA_1^2 = \left(\frac{a + c}{4} - \frac{a}{2}\right)^2,$$
$$\frac{b^2}{4} - \left(\frac{a + c}{4}\right)^2 - \left(\frac{c - a}{4}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(b^2 - \frac{a^2 + c^2}{2}\right) > 0,$$

ami azonos feltétel az I. megoldásban találttal. A feltétel teljesülése esetén egyetlen L és (lényegében egyetlen) A pontot kapunk.

Greskovits József (Budapest, Könyves Kálmán g. II. o. t.)