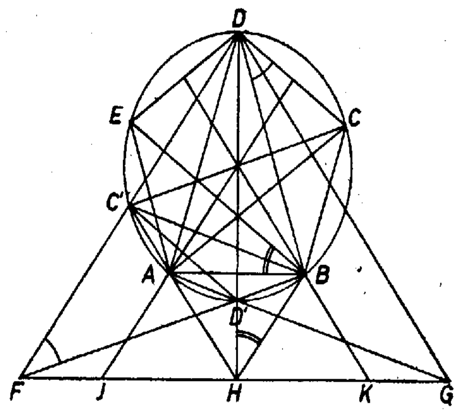
I. megoldás. Az F, G pontpár egymás tükörképe a kiindulási ötszög D-ből kiinduló szimmetriatengelyére, mert (1) és (2) szerint ez áll a szerkesztésükben felhasznált C, E, valamint B, A pontpárra, és így a DC, DE, ill. DB, DA egyenes párokra is. Ugyanezért, (3) szerint H rajta van a mondott tengelyen, tehát $FG \perp DH$. Mivel J, H, K a (4) szerint egy a DH-ra merőleges egyenes pontjai, azért csak azt kell eldöntenünk, merőleges-e FH a DH-ra. Igenlő válasz esetén a kérdéses 5 pont egy egyenesen van.

Mármost $BFD\sphericalangle = BDC\sphericalangle$, mert merőleges szárú szögek és mindkettő hegyesszög (ugyanis az előbbi a BDF derékszögű háromszög szöge, az utóbbi pedig az ötszög köré írt kör félkörnél kisebb BC ívének látószöge egy a nagyobb BC íven levő pontból.

Ugyanígy $BHD\sphericalangle = EBA\sphericalangle$, továbbá az utóbbi az ötszög szabályos volta miatt egyenlő a fenti $BDC\sphericalangle$-gel, ezért $BHD\sphericalangle = BFD\sphericalangle$, tehát $BHFD$ húrnégyszög. Ekkor pedig $FHD\sphericalangle = FBD\sphericalangle$ derékszög, tehát az előrebocsátottak szerint az 5 pont egy egyenesen van.

Az (5) feltételeket nem kellett felhasználnunk.



II. megoldás. Messe a CD-re D-ben és a BD-re B-ben emelt merőleges az ötszög köré írt kört C'-ben, ill. D'-ben. Ezek a kör C-vel, ill. D-vel átellenes pontjai, így egyrészt $C'AC\sphericalangle = 90°$, tehát H-t a $C'A$ egyenes metszi ki DD' meghosszabbításából, másrészt C' és D' felezi a C-t nem tartalmazó AE ívet, ill. a D-t nem tartalmazó AB ívet, harmadrészt $DC'D'\sphericalangle = 90°$. Tükrözzük az ábrát a $C'D'$ szakaszra. Megmutatjuk, hogy ekkor a BDF háromszög a HFD háromszögbe megy át. Ebből már következik $DHF\sphericalangle = FBD\sphericalangle = 90°$, és ebből az, hogy az öt pont egy egyenesen fekszik.

A $DD'F$ háromszög egyenlő szárú, mert egyrészt $D'DF\sphericalangle$ a kör ötödrészét kitevő $C'D'$ ívén nyugszik, így 36°-os, a $BFD\sphericalangle$ pedig a kör 3/10-részényi BC' ívén nyugvó $BDF\sphericalangle$ pótszöge, s így szintén 36°-os. Így D tükörképe $C'D'$-re F, és a DD' egyenes tükörképe az FD' egyenes. H tükörképe tehát az utóbbi egyenes metszéspontja $C'A$ tükörképével. Azonban $C'D'$ felezi az $AC'B\sphericalangle$-et, mert D' felezi az AB ívet. Így AC' tükörképe BC', a H ponté tehát B, és ezzel állításunkat igazoltuk.

Megjegyzés. Az érdeklődők vessék egybe a bizonyítottakat az 1440. feladatban megrajzolt vetület (K. M. L. 34 (1967) 98. o.) $H_7H_9H_1H_3H_5C_6C_9G_7G_9G_8$ pontrendszerével.