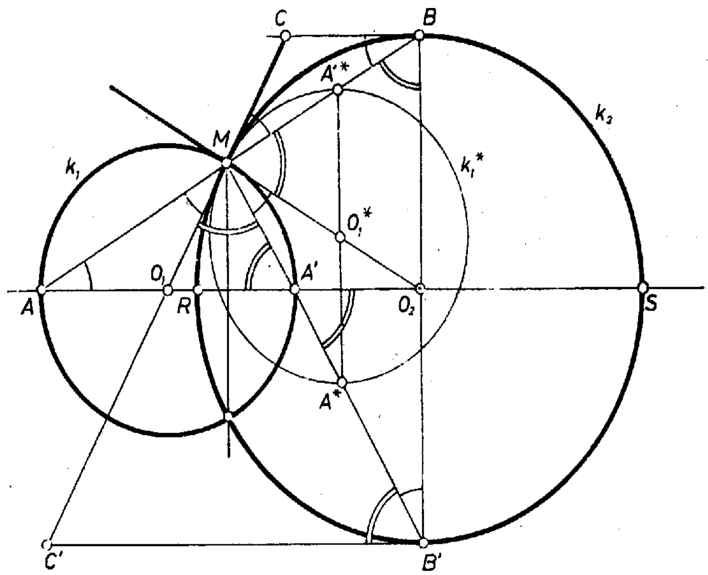
I. megoldás. A feltevés szerint k_2-nek M-beli érintője átmegy k_1-nek O_1 középpontján, k_1-nek M-beli érintője pedig k_2-nek O_2 középpontján, vagyis $O_1MO_2\sphericalangle = 90°$. A közös húr egyenese merőleges az O_1O_2 szimmetriatengelyre, így azt kell belátnunk, hogy BO_2 merőleges O_1O_2-re, más szóval hogy az ABO_2 háromszög A-nál és B-nél levő szögei egymásnak pótszögei.



Legyen A a tengelynek és k_1-nek k_2-n kívül fekvő metszéspontja. Ekkor M az A, B pontpár közt fekszik, hiszen az MO_1 egyenes elválasztja A-t k_2-től. Így, mivel MAO_1 és MBO_2 egyenlő szárú háromszög,

$$O_2BA\sphericalangle = O_2BM\sphericalangle = O_2MB\sphericalangle = (180° - O_2MO_1\sphericalangle) - O_1MA\sphericalangle = 90° - O_1AM\sphericalangle = 90° - O_2AB\sphericalangle,$$

amit bizonyítani akartunk.

Ha pedig a tengelynek és k_1-nek k_2-n belül fekvő A' metszéspontját tekintjük, akkor MA'-nek A'-n túli meghosszabbítása metszi k_2-t B'-ben. A' az O_1O_2 szakaszon van, így az előbbi számításhoz hasonlóan

$$O_2B'A'\sphericalangle = O_2B'M\sphericalangle = O_2MB'\sphericalangle = O_2MA'\sphericalangle = O_2MO_1\sphericalangle - O_1MA'\sphericalangle =$$
$$= 90° - O_1A'M\sphericalangle = 90° - O_2A'B'\sphericalangle,$$

vagyis az állítás a tengely és k_1 mindegyik metszéspontjából kiindulva érvényes.

Prőhle Sarolta (Sopron, Széchenyi I. g. I. o. t.)

II. megoldás. A körök merőlegességéből következik, hogy k_2 M-ben húzott érintője átmegy k_1 középpontján, O_1-en. Ezt felhasználva azt fogjuk megmutatni, hogy a közös húrra merőleges AO_1 egyenes párhuzamos a B-ben húzott érintővel (ami viszont merőleges a k_2 kérdéses átmérőjére).

Legyen az utóbbi érintő metszéspontja O_1M-mel C. Az AO_1M és BCM háromszögek egyenlő szárúak, mert az előbbinek két oldala k_1 sugara, az utóbbié pedig a C-ből k_2-höz húzott érintőszakaszok. A két háromszög M-nél levő szöge egyenlő, mert ha A a centrálisnak és k_1-nek k_2-n kívüli metszéspontja, akkor csúcsszögek, ha pedig a k_2-be eső metszéspont (az ábra A' pontja a megfelelő B' és C' ponttal), akkor egybeesnek. Így egyenlők a másik szárral szemközti szögek is a két háromszögben:

$$O_1AM\sphericalangle = CBM\sphericalangle, \qquad \text{ill.} \qquad O_1A'M\sphericalangle = C'B'M\sphericalangle.$$

Ezek a szögek tehát az első esetben váltószögek, a második esetben egyállású szögek, ebből pedig az állított párhuzamosság következik.

III. megoldás. Tovább használjuk a fenti jelöléseket, valamint azt a megállapítást, hogy az $O_1MO_2\sphericalangle$ derékszög. Fordítsuk el k_1-et M körül a k_1^* helyzetbe úgy, hogy O_1-nek új, O_1^* helyzete az MO_2 félegyenesre jusson. E forgatás szöge derékszög, így A-nak és A'-nek új, A^*, ill. A'^* helyzete az MB', ill. MB egyenesen adódik, hiszen AA' a k_1 átmérője, tehát Thalész tétele miatt az AMA' szög is derékszög; továbbá $A^*A'^* \perp O_1O_2$. Másrészt k_1^* a k_2-nek nagyított képe az M hasonlósági középpontra nézve, így B' képe MB' és k_1^* metszéspontja, A^*, ugyanígy B képe A'^*. Eszerint k_2-nek B-ből (B'-ből) kiinduló átmérője párhuzamos k_1^*-nak A'^*-ból (A^*-ból) kiinduló átmérőjével, tehát merőleges O_1O_2-re.

IV. megoldás. Legyen k_2-nek az O_1O_2 egyenesen levő átmérője RS, ahol $RO_1 < SO_1$, továbbá a két adott kör sugara r_1, ill. r_2. Megmutatjuk, hogy az A-nál közös szöggel bíró ABO_2 és $AA'M$ háromszögek hasonlók; ebből már következik, hogy $BO_2A\sphericalangle = A'MA\sphericalangle$, ami a feladat állítása.

k_2 nek A-ból húzott szelőire $AM \cdot AB = AR \cdot AS$. Ehhez

$$\begin{aligned} AR &= AO_1 + O_1O_2 - O_2R = O_1O_2 + r_1 - r_2, \\ AS &= AO_1 + O_1O_2 + O_2S = O_1O_2 + r_1 + r_2 \quad \text{és} \\ O_1O_2^2 &= r_1^2 + r_2^2, \end{aligned}$$

ennélfogva

$$\begin{aligned} AM \cdot AB &= (O_1O_2 + r_1)^2 - r_2^2 = 2r_1(r_1 + O_1O_2) = AA' \cdot AO_2, \\ AB : AO_2 &= AA' : AM, \end{aligned}$$

állításunk tehát helyes.

Hárs László (Budapest, Kölcsey F. g. II. o. t.)