I. megoldás. Az x^3+y^3 összeg kifejezhető $x+y$ és x^2+y^2 felhasználásával, a következő azonosságok alapján:

$$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2) \text{ és}$$
$$xy=\big((x+y)^2-(x^2+y^2)\big).$$

Ha x és y olyan értékek, amelyekre (1)–(3) fennáll, akkor behelyettesítéssel és átrendezéssel kapjuk, hogy a, b, c közt fenn kell állnia a következő összefüggésnek:

$$a^3-3ab+2c=0. \tag{4}$$

Faragó István (Budapest, Könyves Kálmán g. II. o. t.)

II. megoldás. (1) és (2) szorzata alkalmas csoportosítással:

$$ab=(x+y)(x^2+y^2)=(x^3+y^3)+xy(x+y). \tag{5}$$

Vegyük még a következő azonosságot

$$a^3=(x+y)^3=(x^3+y^3)+3xy(x+y).$$

Ebből (5) háromszorosát kivonva az xy-os tag kiesik:

$$a^3-3ab=-2(x^3+y^3)=-2c,$$

és ez azonos (4)-gyel.

Pap Györgyi (Budapest, Kölcsey F. g. II. o. t.)

III. megoldás. A fenti célszerű ügyeskedéseken kívül a szokásos kiküszöbölés is célhoz vezet. $y=a-x$-et helyettesítve (2)-be és (3)-ba:

$$\begin{aligned} &x^2+(a-x)^2-b=0, \qquad && x^3+(a-x)^3-c=0,\\ &2x(x-a)+a^2-b=0; && 3ax(x-a)+a^3-c=0. \end{aligned} \tag{6}$$

Végül a balról álló egyenlőség $3a$-szorosából kivonva a jobbról állónak a 2-szeresét, ismét megkapjuk (4)-et.

Megjegyzés. A kérdés lényege az, hogy (1)–(3)-at x, y-ra vonatkozó egyenletrendszernek tekintve 3 egyenletünk van, ami csak a talált (4) föltétel teljesülése esetén nem ellentmondó.