I. Megoldás. Ha létezik a kívánt A, B, C, D számnégyes, akkor az a polinom-egyenlőség is azonosság, amit (1)-ből a jobb oldal nevezőjével való szorzás útján kapunk (ez a nevező ugyanis egyszersmind a bal oldali nevezők közös többszöröse, ezért a szorzás útján egész kifejezés adódik):

$$A(x+1)(x^2+x+1)+B(x^2+x+1)+(Cx+D)(x+1)^2=1, \tag{$1'$}$$

x hatványai szerint rendezve

$$(A+C)x^3+(2A+B+2C+D)x^2+(2A+B+C+2D)x+(A+B+D)=1. \tag{$1''$}$$

Eszerint a két oldalon x megfelelő hatványai ugyanavval az együtthatóval kell szerepeljenek, és az x-et nem tartalmazó tagoknak is egyenlőknek kell lenniük:

$$\begin{aligned}
A \qquad + \; C \qquad &= 0, && (2)\\
2A+B+2C+\;D &= 0, && (3)\\
2A+B+\;C+2D &= 0, && (4)\\
A+B \qquad +\;D &= 1. && (5)
\end{aligned}$$

Vonjuk ki (3)-ból egyrészt (2) kétszeresét, másrészt (4)-et:

$$\begin{aligned}
B+D&=0, && (6)\\
C-D&=0. && (7)
\end{aligned}$$

(5) és (6) alapján $A=1$, így (2)-ből $C=-1$, (7)-ből $D=-1$, végül (6)-ból $B=1$. Eszerint a kívánt számnégyes létezik, és (1) így lesz azonosság:

$$\frac{1}{(x+1)^2(x^2+x+1)}=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{x+1}{x^2+x+1}.$$

Varga Katalin (Veszprém, Lovassy L. g. II. o. t.)

Megjegyzés. Úgy is kaphatunk egyenletrendszert az A, B, C, D számokra, ($1'$)-ből, ha x helyére megengedett (azaz -1-től különböző) számokat helyettesítünk. Könnyű a számítás, ha kicsi abszolút értékű egész számokat veszünk, legyen $x=0,\ 1,\ 2$ és -2 (négy egyenletre van szükség):

$$\begin{aligned}
A+\;B \qquad +\;D &= 1, && (5)\\
6A+3B+\;4C+4D &= 1, && (8)\\
21A+7B+18C+9D &= 1, && (9)\\
-3A+3B-\;2C+\;D &= 1. && (10)
\end{aligned}$$

Vonjuk ki (8)-ból (5) 4-szeresét, (9)-ből (5) 9-szeresét, és (10)-ből (5)-öt:

$$\begin{aligned}
& && & 2A-B+4C&=-3, && (11)\\
12A-2B+18C&=-8, && \text{azaz} & 6A-B+9C&=-4, && (12)\\
-4A+2B-2C&=\;\;0, && \text{azaz} & -2A+B-\;C&=\;\;0. && (13)
\end{aligned}$$

Adjuk hozzá (13)-at (11)-hez és (12)-höz: $3C=-3$, azaz $C=-1$, ill. $4A+8C==4A-8=-4$, $A=1$, így (13)-ból $B=C+2A=1$ és (5)-ből $D=-1$.

Kövesi Gusztáv (Budapest, I. István g. II. o. t.)
Faragó István (Budapest, Könyves Kálmán g. II. o. t.)

II. Megoldás. Ha (1) fennáll, akkor

$$\frac{A}{x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+x+1}=\frac{1}{(x+1)^2(x^2+x+1)}-\frac{B}{(x+1)^2}=\frac{1-B(x^2+x+1)}{(x+1)^2(x^2+x+1)}. \tag{14}$$

Ehhez az kell, hogy a jobb oldal $(x+1)(x^2+x+1)$-gyel szorozva polinommá váljon, vagyis hogy egyszerűsíthető legyen $x+1$-gyel. A számláló akkor alakítható $x+1$ és egy másik (elsőfokú) polinom szorzatává, ha értéke $x=-1$ esetén 0, hiszen így az $x+1$ tényező 0 lesz. Eszerint $1-B\cdot 1=0$, $B=1$. Valóban, így (14) jobb oldala

$$\frac{-x(x+1)}{(x+1)^2(x^2+x+1)}=\frac{-x}{(x+1)(x^2+x+1)}.$$

Hasonlóan, (14) első tagját a jobb oldalra víve

$$\frac{Cx+D}{x^2+x+1} = \frac{-x}{(x+1)(x^2+x+1)} - \frac{A}{x+1} = \frac{-x-A(x^2+x+1)}{(x+1)(x^2+x+1)}, \tag{15}$$

a jobb oldal számlálójának itt is 0-t kell adnia $x=-1$ esetén, ebből $A=1$. Ezzel (15) így alakul

$$\frac{Cx+D}{x^2+x+1} = \frac{-(x^2+2x+1)}{(x+1)(x^2+x+1)} = \frac{-x-1}{x^2+x+1},$$

ami akkor áll fenn minden előírt x-re, ha $C=-1$, $D=-1$.

Megjegyzés. Ez a megoldás rávilágít annak az okára is, hogy *lehetséges* alkalmas A, B, C, D értéket találni. (A fent nyert egyenletrendszerek ugyanis – és minden más hasonlóan nyerhető egyenletrendszer is – lehetnének ellentmondók.)