I. megoldás. Legyen az AB él felezőpontja E, a D csúcs tükörképe E-re F, és a CF szakasz felezőpontja G. Ekkor CE az ABC és DFC háromszögek közös súlyvonala, ezért S a közös súlypontjuk, továbbá DG is súlyvonala a CDF háromszögnek, így a DS egyenes átmegy G-n, és $DS = 2DG/3$. Legyen még D tükörképe G-re a H pont, C képe E-re J. Alkalmazzuk a 1040. gyakorlatban bebizonyított tételt[1] a $CDFH$, $ADBF$, $CDJF$ és $ACBJ$ paralelogrammákra:

$$DS^2 = \frac{4}{9}DG^2 = \frac{1}{9}DH^2 = \frac{1}{9}(2CD^2 + 2DF^2 - CF^2), \tag{2}$$

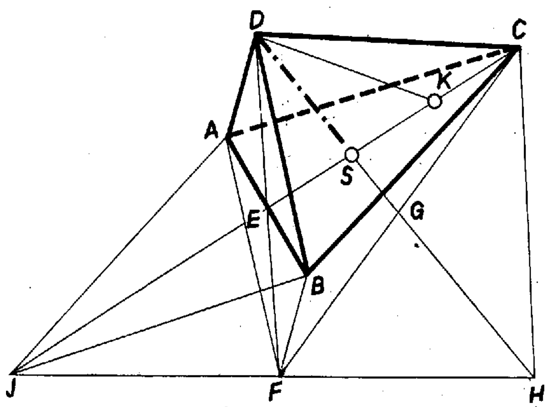
$$DF^2 = 2AD^2 + 2BD^2 - AB^2, \tag{3}$$

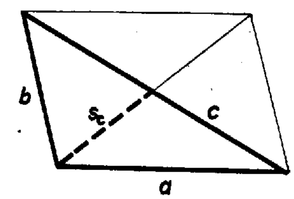
$$CF^2 = \frac{DF^2 + CJ^2}{2} - CD^2, \tag{4}$$

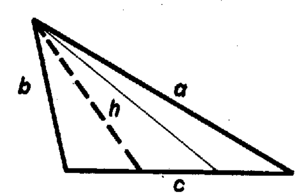
$$CJ^2 = 2AC^2 + 2BC^2 - AB^2, \tag{5}$$

és helyettesítsük (2)-be előbb (3)-at és (4)-et, majd (3)-at és (5)-öt. Így éppen a bizonyítandó (1) állítást kapjuk.

Michaletzky György (Budapest, Piarista g. II. o. t.)
Rigó Erzsébet (Kiskunfélegyháza, Móra F. g. II. o. t.)







II. megoldás. Legyen a CS szakasz felezőpontja K, így $KS = SE$, tehát DS a DEK háromszög súlyvonala, DK pedig a DCS háromszögé.

Az I. megoldásban idézett tételből adódik, hogy az a, b, c oldalú háromszög c oldalához tartozó s_c súlyvonalra, mint a paralelogrammává kiegészített háromszög átlójának felére, teljesül

$$s_c^2 = \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4}.$$

Alkalmazzuk ezt a mondott két súlyvonalra; figyelembe véve, hogy $EK = SC = 2CE/3$.

$$DS^2 = \frac{2DE^2 + 2DK^2 - \dfrac{4CE^2}{9}}{4} \tag{6}$$

$$DK^2 = \frac{2DS^2 + 2DC^2 - \dfrac{4CE^2}{9}}{4}. \tag{7}$$

(7) felét (6)-hoz adva DK^2 kiesik, rendezéssel

$$DS^2 = \frac{2DE^2 + DC^2 - \dfrac{2CE^2}{3}}{3}. \tag{8}$$

DE az ABD, CE pedig az ABC háromszög súlyvonala, azért hasonlóan

$$DE^2 = \frac{2DA^2 + 2DB^2 - AB^2}{4}, \qquad CE^2 = \frac{2AC^2 + 2BC^2 - AB^2}{4},$$

[1] Paralelogramma átlóinak négyzetösszege egyenlő oldalainak négyzetösszegével. K. M. L. 33 (1566) 152. o.

ezeket (8)-ba helyettesítve (1)-et kapjuk.

Feind Ferenc (Székesfehérvár, Teleki B. g. I. o. t.)
Szengofszky Oszkár (Budapest, Berzsenyi D. g. I. o. t.)

Megjegyzés. (8)-ban a c oldal b-hez közelebbi h harmadolójára ezt kaptuk:

$$h^2 = \frac{6b^2 + 3a^2 - 2c^2}{9}.$$