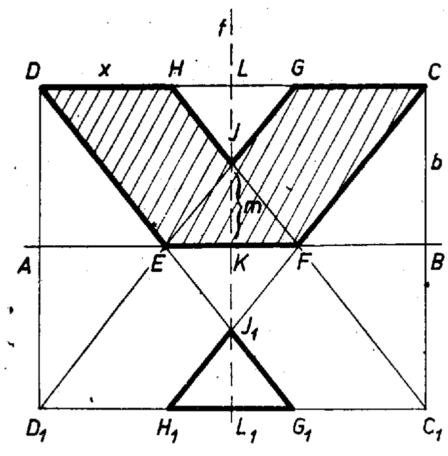
a) Az előírás szerint E és F, valamint H és G tükrös pontpár az AB oldal f felező merőlegesére nézve (1. ábra). Ezért az EG, FH szakaszpár is egymás képe, és J rajta van f-en; így f a **V**-nek is tengelye. $BF < BE$ miatt $EF = x > 0$, másrészt $DH < DG$ miatt $x < a - x$, $x < a/2$, összefoglalva

$$0 < x < a/2. \tag{1}$$

A kérdéses arány

$$q = \frac{AE}{AB} = \frac{a-x}{2} : a = \frac{a-x}{2a},$$

és itt $a > a - x > a/2$, ezért $1/2 > q > 1/4$.



1. ábra

b) A **V**-idom t területe az EFJ egyenlő szárú háromszög területével kisebb, mint az egybevágó $EFCG$ és $EFHD$ paralelogrammák együttes területe, $2bx$. Legyen az EFJ háromszög magassága m, ekkor a GHJ háromszög magassága $b - m$, alapjuk rendre x, $a - 2x$, s mivel nyilvánvalóan hasonlók:

$$\frac{b-m}{m} = \frac{a-2x}{x}, \qquad \frac{b}{m} = \frac{a-x}{x}, \qquad m = \frac{bx}{a-x}.$$

Most már

$$t = 2bx - \frac{bx^2}{2(a-x)} = \frac{bx(4a-5x)}{2(a-x)}. \tag{2}$$

c) A $t = ab/2$ követelményből rendezéssel $5x^2 - 5ax + a^2 = 0$, és

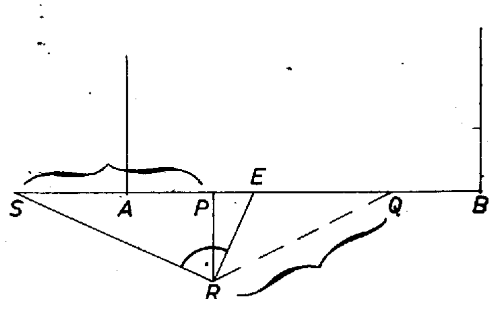
$$x = \frac{a}{2} - \frac{a}{2\sqrt{5}}, \qquad \left(= \frac{a\left(5-\sqrt{5}\right)}{10} \approx a \cdot 0{,}276\ldots\right), \tag{3}$$

ugyanis az egyenlet másik gyöke (1) szerint nem megengedett érték.

A szerkesztésben elég az E pontot kitűzni. $a/4 = c$ jelöléssel (3) esetén

$$AE = \frac{a-x}{2} = \frac{a}{4} + \frac{a}{4\sqrt{5}} = c + \frac{c}{\sqrt{5}} = c + \frac{c^2}{c\sqrt{5}}. \tag{4}$$

Felhasználjuk, hogy a második tag nevezője könnyen szerkeszthető, mint a c és $2c$ befogókkal bíró derékszögű háromszög átfogója, másrészt a második tag és a nevező mértani középarányosa c.



2. ábra

Legyen AB első és harmadik negyedelő pontja P, ill. Q (2. ábra), mérjük föl a P-ben állított merőlegesre a $PR = PA$, majd P-től A irányában a $PS = QR$ szakaszt. Ekkor az SR-re R-ben állított merőleges AB-t a keresett E-ben metszi, mert $PR = c$, $PS = RQ = PR\sqrt{5}$, $PE = PR^2/PS = PR/\sqrt{5}$, és így $AE = AP + PE$ megfelel (4) utolsó előtti tagjának.

d) Tükrözzük az alakzatot az AB egyenesre (1. ábra): a pontok tükörképét a pont jele mellé tett 1-es indexszel jelöljük. $GC = EF = DH = D_1H_1$ miatt D_1H_1CG paralelogramma, és D_1G oldala átmegy E-n, H_1C oldala F-en. Hasonlóan DG_1, ill. HC_1 átmegy E-n, ill. F-en. Legyen az AB, CD szakasz felezőpontja K, ill. L. Ha E az AK szakaszon K-tól A felé mozog, akkor J_1 a KL_1 szakaszon K-tól L_1 felé fut. A **V** alakú idom területe egyenlő a $CDEF$ trapéz és a $G_1H_1J_1$ háromszög területének a különbségével. E fenti mozgása során a trapéz területe nő – hiszen CD és a magasság változatlan, EF nő – a háromszög területe pedig csökken – mert J_1L_1 és $H_1G_1 = HG = CD - 2EF$ csökken – a **V**-idomterülete tehát nő. Így annak sem a minimuma, sem a maximuma nem létezik. – Nem lehet ugyanis sem $x = 0$, sem $x = a/2$, így pedig bármilyen megengedett x_0-hoz (azaz ha $0 < x_0 < a/2$) tartozó t_0 területet tekintjük is, bármely 0 és x_0 közti x_1-hez $t_1 < t_0$ és bármely x_0 és $a/2$ közti x_2-höz $t_2 > t_0$ terület tartozik.

Lengyel Tamás (Budapest, Berzsenyi D. g. II. o. t.)