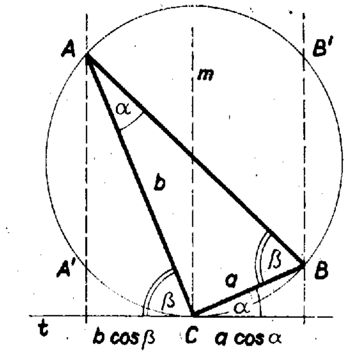
Rajzoljunk kört a háromszög köré és húzzuk meg C-ben a t érintőjét. Ez az a oldallal α szöget, a b oldallal β szöget zár be, így $a\cos\alpha$ és $b\cos\beta$ az a, ill. b vetülete t-n. (1) tehát azt jelenti, hogy C-től mindkét irányban alkalmas egyenlő távolságot mérve t-re, az ezekben t-re állított merőleges metszi ki A-t, ill. B-t a körből (1. ábra).



1. ábra

A két merőleges vagy érinti a kört, ekkor ABC egyenlő szárú derékszögű háromszög, vagy egy-egy húrt metsz ki, amelyek szimmetrikusak a C-ben t-re állított m merőlegesre. Így 4 pontot metszenek ki, amelyek egy téglalap csúcsai. A és B tehát vagy szimmetrikusak m-re, és ekkor $AC = CB$, a háromszög egyenlő szárú, vagy a téglalap átellenes csúcsai. Utóbbi esetben AB a kör egy átmérője (a téglalap másik két csúcsából derékszögben látszik), s így ABC háromszög C-nél derékszögű. (1) mindkét esetben valóban teljesül, utóbbiban azért, mert a C-ben t-re állított merőleges az érintési sugár, így felezi AB-t, AC és BC vetülete tehát AB egyik, ill. másik felének is vetülete.

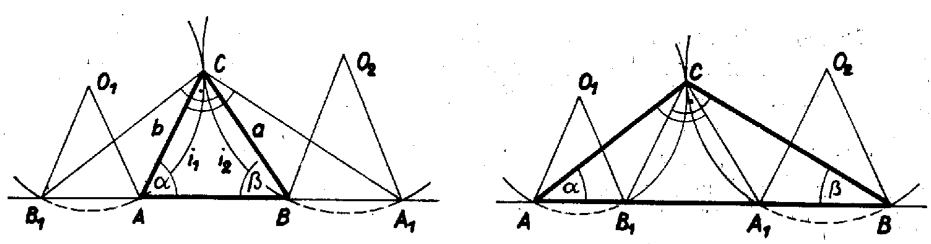
Megjegyzések. 1. A feladat kitűzésekor a versenyzők még csak hegyesszögek függvényeiről tanultak. Ha nem szorítkozunk erre az esetre, akkor is tudjuk, hogy α és β közül legalább az egyik hegyesszög, ekkor (1) megfelelő oldala pozitív, tehát a másik is, s így a másik szögnek hegyesszögnek kell lennie.

2. A beküldött megoldások általában felhasználták a háromszögek színusz- vagy koszinusz-tételét – amit még szintén nem tanultak az iskolában –, azonban a közölt megoldás mutatja, hogy egyszerűen célhoz érünk a koszinusz-függvény értelmezésén kívül csak I. osztályos ismereteket felhasználva is.

3. Továbbra is hegyesszögekre szorítkozva (1)-nek átrendezett

$$\frac{\alpha}{\cos\beta} = \frac{b}{\cos\alpha} \tag{2}$$

alakja alapján is megadhatjuk a választ a kérdésre, kizárólag a koszinusz-függvény definíciója alapján.



2. ábra

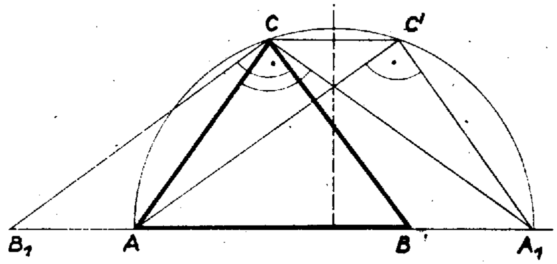
Messe a C-ben CB-re, CA-ra állított merőleges AB-t B_1-ben, ill. A_1-ben. Így (2) azt teszi fel, hogy a BB_1C és AA_1C derékszögű háromszögek átfogója egyenlő (2. ábra):

$$BB_1 = AA_1. \tag{3}$$

Ez nyilvánvalóan teljesül, ha A_1 azonos B-vel, vagyis ha C-nél derékszög van, hiszen ekkor B_1 is azonos A-val.

$\gamma < 90^\circ$ esetén A a BB_1 szakaszon, B az AA_1 szakaszon van, így (3)-ból AB-t levonva $B_1A = BA_1$, és ugyanez adódik $\gamma > 90^\circ$ esetén is, ha $AB = AB$-ből (3)-at kivonjuk. A B_1A és BA_1 szakaszokat C-ből ugyanakkora szögben látjuk, ezért $|\gamma - 90^\circ|$ nyílású i_1, i_2 látóköríveik sugarai is egyenlők. Azokat az íveket véve, melyek AB-nek azon az oldalán vannak, mint C, az ív O_1, ill. O_2 középpontja a szakaszokkal egybevágó, egyenlő szárú háromszögeket alkot. A két ív egymás tükrös párja közös húregyenesükre, az ABC háromszög C-ből induló magasságvonalára nézve. Ugyanez áll tehát a CAB_1, CBA_1 háromszögpárra, vagyis az A, B pontpárra is, tehát ABC egyenlő szárú háromszög.

Ezek szerint a kérdéses háromszög vagy derékszögű, és benne a, b a befogók, vagy egyenlő szárú, és benne a, b a szárak.



3. ábra

4. A (3)-ra támaszkodva így is befejezhetjük a meggondolást (3. ábra): AA_1C és BB_1C egybevágó derékszögű háromszögek. Toljuk el az utóbbit úgy, hogy B_1 az A-ba jusson, ekkor B az A_1-be jut, ezért C-nek új, C' helyzete is rajta van az AA_1 szakasz fölötti Thalész-körön. CC' felező merőlegese AA_1-re is merőleges, ezen tükrözve AA_1C' átmegy A_1AC-be, tehát $CA = C'A_1 = CB$.