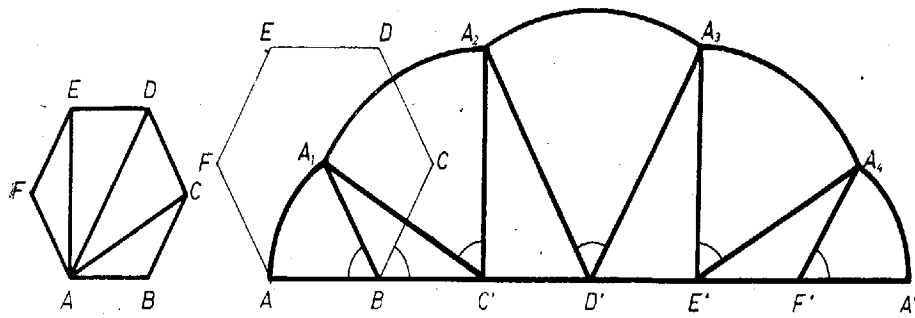
I. A hatszög rendre az AB egyenes B, C', D', E', F' pontjai körül fordul el 60–60°-kal – H_6 külső szögével –, ahol $AB = BC' = C'D' = D'E' = E'F' = F'A'$. Eközben az A pont rendre az AA_1, A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A' íveken mozdul el. Meghúzva az ívdarabok mindegyik csatlakozási pontjához a 2–2 megfelelő sugarat, ezek a kérdéses T idomot 5 körcikkre és köztük 4 háromszögre darabolják.



Az egymás utáni háromszögek rendre egybevágók azokkal a háromszögekkel, amelyek H_6-ban keletkeznek, az AC, AD, AE átlókat megrajzolva, hiszen az előbbiek az utóbb említettekből keletkeznek kellő elfordítással, így területük összege egyenlő H_6 területével, t-vel.

Ezek szerint a körcikkek sugara rendre egyenlő H_6-nak AB, AC, AD, AE, AF oldalával, ill. átlójával. Mindegyik körcikk területe $1/6$ része a vele egyenlő sugarú kör területének, ezért területük összege kellő csoportosítással és H_6 szabályos voltát felhasználva így írható:

$$\frac{\pi}{6}\left((BA^2+EA^2)+(CA^2+FA^2)+DA^2\right)=\frac{\pi}{6}(BE^2+CF^2+DA^2)=\frac{\pi}{6}\cdot 3DA^2=$$
$$=\frac{\pi}{2}\cdot(2r)^2=2\pi r^2,$$

ahol $DA/2 = r$ a H_6 köré írt k kör sugara; ugyanis $BE = CF = DA$, mint H_6 leghosszabb átlói, más szóval k átmérői.

Ezzel a T idom minden egyes darabját számba vettük, területeik összege valóban $t + 2\pi r^2$, amint a feladat állítja.

II. Gördítsünk most $2n$-oldalú ($n > 3$, természetes szám) $G_0G_1G_2\dots G_{2n-1} = H_{2n}$ szabályos sokszöget a $G_0G_1 = e$ egyenesen úgy, hogy az első elfordulás G_1 körül történjen, a továbbiak rendre $G_2, G_3, \dots, G_{2n-1}$ egymás után adódott helyzete körül. Legyen G_0 helyzete az egymás utáni elfordulások után $G_{01}, G_{02}, \dots, G_{0,2n-1}$. Az utolsó az e egyenesre esik. Az elfordulás középpontja rendre az egyenes $G_1, G_2', G_3', \dots, G_{2n-1}'$ pontja, ahol $G_0G_1 = G_1G_2' = G_2'G_3' = \ldots = G_{2n-1}'G_{0,2n-1}$ a H_{2n} oldalhosszúsága, az elfordulás szöge pedig minden esetben H_{2n} külső szöge:

$$180^\circ - \frac{(2n-2)\cdot 180^\circ}{2n} = \frac{360^\circ}{2n},$$

a teljes szög $2n$-ed része.

Összekötve G_0 minden közbülső helyzetét azzal a két ponttal, amely körüli elfordulással odaérkezett, ill. onnan továbbhaladt, a

$$G_{01}G_1,\quad G_{01}G_2',\quad G_{02}G_2',\quad G_{02}G_3',\quad \dots,\quad G_{0,2n-2}G_{2n-2}',\quad G_{0,2n-2}G_{2n-1}'$$

sugarak – szám szerint $2(2n-2)$ sugár – a vizsgálandó $G_0G_{01}, G_{01}G_{02}, \dots, G_{0,2n-2}G_{0,2n-1}$ egymáshoz csatlakozó ívek és a $G_0G_{0,2n-1}$, egyenesszakasz által határolt T idomot a számuknál 1-gyel több részre darabolják. A részek közül minden második rész körcikk, hiszen a berajzolt sugarak a másodiktól kezdve páronként egyenlők egymással és H_{2n}-nek $G_2G_0, G_3G_0, \dots, G_{n-1}G_0, G_nG_0, G_{n+1}G_0, \dots, G_{2n-2}G_0$ átlójával; az első és az utolsó elfordulási sugár pedig H_{2n}-nek G_0G_1, ill. $G_{2n-1}G_0$ oldala. A körcikkek száma $(2n-2)+1 = 2n-1$. Köztük a $G_{01}G_1G_2'$, $G_{02}G_2'G_3'$, $\dots$, $G_{0,2n-2}G_{2n-2}'G_{2n-1}'$ háromszögek keletkeztek, számuk $2n-2$, ezek rendre elfordított helyzetei annak a $2n-2$ háromszögnek, amelyek H_{2n}-ben keletkeznek a $G_0G_2, G_0G_3, \dots, G_0G_{2n-2}$ átló megrajzolása útján.

Eszerint a T idomban keletkezett háromszögek területének összege egyenlő H_{2n} területével, ezért a feladat állításához már csak azt kell belátnunk, hogy a körcikkek területének összege 2-szer akkora, mint a H_{2n} köré irt k kör területe. Legyen k sugara r. Minden egyes körcikk középponti szöge az egyszeri elfordulás $360^\circ/2n$ szöge, így területe egyenlő az elfordulási r_i sugárral írt kör területének $1/2n$ részével, $(\pi/2n)\cdot r_i^2$-nel. Ezt kell tehát belátnunk:

$$\frac{\pi}{2n}(G_1G_0^2 + G_2G_0^2 + \ldots + G_{2n-2}G_0^2 + G_{2n-1}G_0^2) = 2\pi r^2,$$

vagyis hogy a G_0-ba befutó 2 oldal és $2n-3$ átló négyzetösszege $4n\cdot r^2 = n(2r)^2$.

A G_nG_0 átló k-nak átmérője, hossza $2r$. A további $2n-2$ átló négyzete alkalmas párokban ad $(2r)^2$-et összegül, együtt tehát a hátra levő $(n-1)\cdot(2r)^2$-et. Egy párba kapcsoljuk azt a két átlót, melyek kiindulópontja egymás tükörképe H_{2n}-nek O középpontjára nézve, vagyis G_iG_0-t és $G_{n+i}G_0$-t, ahol $i=1, 2, \ldots, n-1$ (tehát $n+i=n+1$, $n+2, \ldots, 2n-1$). Így valóban $G_iG_0^2+G_{n+i}G_0^2=G_iG_{n+i}^2=(2r)^2$, hiszen i minden értékére $G_iG_{n+i}G_0$ a k-ba beírt derékszögű háromszög. – Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

Göndöcs Ferenc (Kapuvár, II. sz. Ált. Isk. , 8. o. t.)
Pataki János (Budapest, Berzsenyi D. g. I. o. t.)

Megjegyzések. 1. H_{2n} esetére trigonometriai és goniometriai bizonyítás is adható, az $r_i=G_iG_0=2r\sin(i\cdot\pi)/2n$ és $\sin^2 x=(1-\cos 2x)/2$ összefüggésekből kiindulva. A körcikkek területének összege (itt $i=1, 2, \ldots, 2n-1$, de hozzá írhatjuk $i=0$-t is, mert így $r_i=0$)

$$\frac{\pi}{2n}\cdot 2r^2\left[(1-\cos 0)+\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)+\left(1-\cos\frac{2\pi}{n}\right)+\ldots+\left(1-\cos\frac{(2n-1)\pi}{n}\right)\right]=$$
$$=2\pi r^2-\frac{\pi r^2}{n}\left(\cos 0+\cos\frac{\pi}{n}+\cos\frac{2\pi}{n}+\ldots+\cos\frac{(2n-1)\pi}{n}\right).$$

A zárójelbeli $2n$ tag összege 0, mert a tagok az $n+1$-ediktől kezdve rendre egyenlők az 1., 2., …, n sorszámú tag (-1)-szeresével, $j=0, 1, \ldots, n-1$-re

$$\cos\frac{(n+j)\pi}{n}=\cos\left(\pi+\frac{j\pi}{n}\right)=-\cos\frac{j\pi}{n}.$$

Mészáros József (Makó, József A. g. , III. o. t.)

2. Azt is meg lehet mutatni, hogy az állítás páratlan oldalszámú szabályos sokszög gördítése esetén is érvényes.

3. Az r sugarú körbe írt szabályos sokszög oldalainak számát növelve területe nő és egyre jobban megközelíti k területét; így kézenfekvő az a sejtés, hogy a körnek egyenesen való gördítése esetén egy kerületi pont által leírt vonal – ún. közönséges ciklois – egy íve alatti terület egyenlő a gördített kör területének 3-szorosával.

Ésik Zoltán (Szeged, Ságvári E. gyak. g. II. o. t.)