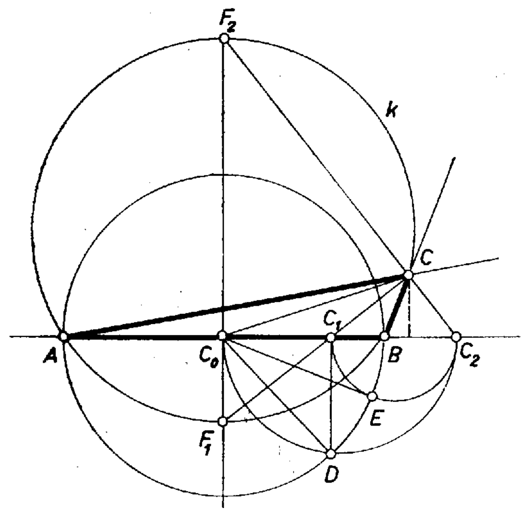
A CC_1 és CC_2 egyenesek közti szög derékszög, mert a felezett szögek együtt egyenesszöget alkotnak. Továbbá CC_1 megfelezi az ABC háromszög köré írt k körnek az ACB szög szárai közé eső ívét is, mert az íven levő pontját F_1-gyel jelölve az F_1CA és F_1CB kerületi szögek egyenlők, tehát a száraik közti F_1A, F_1B ívek is.



Ezekből Thalész tételének megfordítása alapján következik, hogy a C_2C szakasz meghosszabbítása átmegy az F_1-ből kiinduló átmérő F_2 végpontján. Ez az átmérő viszont felező merőlegese az AB oldalnak, és így azt C_0 ban metszi. ($AC > BC$ miatt a szögfelezőre ismert tétel szerint $AC_1 > BC_1$, és $BC_1C\sphericalangle < 90°$. Így a pontok sorrendje C_0, C_1, C_2.)

Ezek alapján a szerkesztés a következőképpen végezhető. Egy C csúcsú derékszög két szárára fölmérjük a CC_1, CC_2 szakaszt, a C_1C_2 egyenest metsszük a C körüli, CC_0 sugarú körrel, és C_0-nak vesszük a C_1C_2 szakasz C_1 en túli meghosszabbítására eső metszéspontot. C_0-ban merőlegest állítunk C_1C_2-re, ennek metszéspontja a CC_1, CC_2 egyenessel F_1, ill. F_2. Végül az F_1F_2 átmérő fölötti k Thalész–körrel a C_1C_2 egyenesből kimetsszük A-t és B-t, közülük B a C-hez közelebbi metszéspont.

Az ABC háromszög megfelel a követelményeknek, mert C_0 felezi AB-t, k áthalad C-n, hiszen F_1CF_2 derékszög, ezért ABC a k körbe írt háromszög, C_1, mint a CF_1 húr pontja, k belsejében van, C_2 viszont k-n kívül. F_1 felezi az AB ívet, és így CF_1, azaz CC_1 felezi az ACB szöget, CC_2 pedig külső (mellék-) szögeit, mert C_1CC_2 derékszög. Végül a CC_0, CC_1, CC_2 szakaszokat közvetlenül fölmértük.

A és B létrejön, ha F_1 a C_1C_2 egyenes C-t nem tartalmazó partján adódik, aminek feltétele, hogy $CC_0 > CC_1$ legyen. Ha ez teljesül, a megoldás egyértelmű.

Bauer Katalin (Budapest, Berzsenyi D. g. I. o. t.)

Megjegyzés. A C, C_1, C_2, C_0 pontok fenti előállítása után befejezhetjük a szerkesztést a szögfelező osztásarányára ismert $C_1A : C_1B = CA : CB$, valamint a külső szögfelezőre ugyanúgy bizonyítható $C_2A : C_2B = CA : CB$ tétel alapján is. Ezekből, $AC_0 = C_0B$ fölhasználásával

$$C_1A : C_1B = C_2A : C_2B,$$
$$(AC_0 + C_0C_1) : (AC_0 - C_0C_1) = (AC_0 + C_0C_2) : (C_0C_2 - AC_0),$$
$$AC_0^2 = C_0C_1 \cdot C_0C_2,$$

vagyis az AB oldal fele mértani középarányos a C_0C_1, C_0C_2 szakaszok között.

Eszerint a C_0C_2 átmérő fölötti Thalész–kör és a C_1-ben C_1C_2-re állított merőleges metszéspontját D-vel jelölve, A-t és B-t a C_0 középű, C_0D sugarú kör metszi ki a C_1C_2 egyenesből. – Másképpen: C_0A-t megadja a C_0-ból a C_1C_2 átmérőjű körhöz húzott érintő C_0E hossza.