I. Az 1029. gyakorlatban[1] talált negyedik közelítő érték:

$$\sqrt{a^2+b} \approx a + \frac{b}{2a} - \frac{b^2}{4a(2a^2+b)} - \frac{b^4}{8a(2a^2+b)(8a^4+8a^2b+b^2)}. \tag{2}$$

a^2+b átmegy $1+x$-be, ha $a=1$, $b=x$, ekkor (2) így alakul:

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4(2+x)} - \frac{x^4}{8(2+x)(8+8x+x^2)}, \tag{3}$$

ami az első két tagban egyezik (1)-gyel. (3) harmadik tagjából (1) harmadik tagja előáll úgy, hogy a nevezőben elhagyjuk a $2+x$ tényező x tagját, mintegy azt mondván *egyelőre*, hogy ez „kicsi" a 2-es taghoz képest. Próbáljuk ezt tekinteni a kérdéses módosítás egy elemének, azaz $d_2 = -x^2/[4(2+x)]$ helyére a $d_2' = -x^2/2^3$ hányadost írni.

Ugyanez a lépés, ti. x elhagyása „nagyobb" tag mellől (3) negyedik tagja nevezőjének mindkét tényezőjében, a tagot $-x^4/128 = -x^4/2^7$-re, egyszerűbbre módosítja. Ez a tag (1) ötödik tagjára emlékeztet, de ott az 5-szöröse áll. Ennek megmagyarázásán túl a következő kérdés is fölmerül: honnan ered (1) negyedik tagja?

Lépésünk következményeire áttérve kézenfekvő ez a sejtés: x-et csak a d_2' hányados felírásában hagyták el, hogy a közelítő kifejezésben ne léphessen fel nevezőben, viszont a következő maradék megállapításában mégis a helyes osztó és a módosult új tag szorzatát vonták le az előző maradékból; ez a szorzat ugyanis x-nek ismét polinomja, amivel nincs olyan számolási kényelmetlenség. Nézzük meg hát, hogyan alakul tovább az eljárás, maradéknak az $m_3' = m_2 - (2c_2 + d_2') \cdot d_2$ különbséget véve, ahol $m_2 = -b^2/4a^2 = -x^2/4$, és $c_2 = 1 + x/2$. Ezt kapjuk:

$$m_3' = -\frac{x^2}{4} - \left(2 + x - \frac{x^2}{2^3}\right)\left(-\frac{x^2}{2^3}\right) = \frac{x^3}{2^3} - \frac{4^4}{2^6}.$$

Ha a következő tagot úgy képezzük, hogy ezt, pontosabban mondva m_3' első tagját, az eddig kapott $c_3' = 1 + x/2 - x^2/2^3$ közelítő érték 2-szerese helyett ismét csak $2c_1$-gyel osztjuk, akkor

$$d_3' = m_3''/2c_1 = (x^3/2^3) : 2 = x^3/2^4$$

adódik. Eszerint sejtésünk magyarázatot adott (1) negyedik tagjának fellépésére.

Ezzel be is fejeztük keresésünket. Ugyanis (1)-nek 5. tagja is kiadódik eddigi módosításaink szerint:

$$m_4' = m_3' - (2c_3' + d_3') \cdot d_3' = \frac{x^3}{2^3} - \frac{x^4}{2^6} - \left(2 + x - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{2^4}\right) \cdot \frac{x^3}{2^4} = -\frac{5x^4}{2^6} + \frac{x^5}{2^6} - \frac{x^6}{2^8},$$

innen

$$d_4' = \left(-\frac{5x^4}{2^6}\right) : 2 = -\frac{5x^4}{2^7},$$

ami éppen (1) utolsó tagja.

A módosítás talált két, elemét egybefoglalhatjuk a következő megállapításban, amivel a „kicsi mennyiség elhagyása" nem elég határozott kifejezés használatát is elkerüljük: (1) az 1029. gyakorlatbeli eljárás szerint adódott, az osztásokat úgy végezve, hogy új tagként a (csökkenően rendezett) *maradék első tagjából* és a (növekvően rendezett) *osztó első tagjából* képezett hányadost vettük. Valóban, így osztottunk az első lépésben is $2+x$ első tagjával, 2-vel, nem az elhagyás volt a lényeges.

II. Ezek alapján a kívánt további 2 tag számítása:

$$\begin{aligned}
m_5' =& m_4' - (2c_4' + d_4') \cdot d_4' = -\frac{5x^4}{2^6} + \frac{x^5}{2^6} - \frac{x^6}{2^8} - \left(2 + x - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{2^3} - \frac{5x^4}{2^7}\right) \cdot \left(-\frac{5x^4}{2^7}\right) = \\
=& \frac{7x^5}{2^7} - \frac{7x^6}{2^9} + \textit{ két magasabb fokú tag,} \\
& d_5' = \frac{7x^5}{2^7} : 2 = \frac{7x^5}{2^8}, \qquad m_6' = \ldots = -\frac{21x^6}{2^9} + \textit{ magasabb fokú tagok,} \\
& d_6' = \frac{21x^6}{2^{10}}.
\end{aligned}$$

x-nek 6-iknál magasabb fokú tagjaira nem volt szükségünk. Ezek szerint (1) így alakul:

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2^3} + \frac{x^3}{2^4} - \frac{5x^4}{2^7} + \frac{7x^5}{2^8} - \frac{21x^6}{2^{10}}. \tag{4}$$

[1] A megoldás megértéséhez nem nélkülözhetjük e gyakorlat megoldásának átnézését –K. M. L. 33 (1966. nov.) 143. o. A továbbiakban az ottani jelöléseket is használjuk: c_i (i-edik közelítő érték), d_i (hányados, c_i-nek $i+1$-edik tagja), m_i (maradék c_i megállapítása után). Ugyanezeket a keresett módosításban felső vesszővel különböztetjük meg.

III. Alkalmazzuk az eljárást $\sqrt{10}$-nek az 1100. gyakorlatban[2] megadott, valamint az abból átalakítással képezhető $3\sqrt{1+1/9}$ kifejezésére, vagyis $x=-1/10$, ill. $x=1/9$ esetében. A kiemelt szorzóval mindjárt beszorozva

$$\sqrt{10}=\frac{10}{3}\sqrt{1-\frac{1}{10}}=\frac{10}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{12\cdot 20}-\frac{1}{12\cdot 20^2}-\frac{5}{48\cdot 20^3}-\frac{7}{48\cdot 20^4}-\frac{7}{32\cdot 20^5},$$
$$\sqrt{10}=3\sqrt{1+\frac{1}{9}}=3+\frac{1}{6}-\frac{3}{2\cdot 18^2}+\frac{3}{2\cdot 18^3}-\frac{15}{2\cdot 18^4}+\frac{21}{8\cdot 18^5}-\frac{63}{16\cdot 18^6}.$$

Az első két tag összege a két kifejezésben egyenlő. A tagokat 8 tizedesre számítva, kerekítés nélkül:

$$\begin{array}{rr}
+3,166\,666\,66 & 3,166\,666\,66 \\
-0,004\,166\,66 & -0,004\,629\,62 \\
-0,\ldots 208\,33 & +0,\ldots 257\,20 \\
-0,\ldots 013\,02 & -0,\ldots 017\,86 \\
-0,\ldots\ldots 91 & +0,\ldots 001\,38 \\
-0,\ldots\ldots 06 & -0,\ldots\ldots 11 \\
\hline
3,162\,277\,68, & 3,162\,277\,65.
\end{array}$$

A szokásos eljárással[3] ugyancsak 3,162 277 6 . . . adódik (kerekítés nélkül).

Csörgei József (Budapest, Fazekas M. gyak. g. III. o. t.)
Fialovszky Alice (Budapest, Patrona Hungariae g. II. o. t.)
Moson Péter (Budapest, Fazekas M. gyak. g. III. o. t.)

Megjegyzés. A $10\cdot 37^2=117^2+1$ egyenlőség alapján egy más átalakítás $\sqrt{10}=(117/37)\sqrt{1+1/117^2}$. Itt $1/117^2=1/13\,689$ hatványai gyorsabban csökkennek, kevesebb tagot elég kiszámítani (4)-ből, viszont az osztások, szorzások valamivel nehézkesebbek. Így

$$\sqrt{10}=\frac{117}{37}\sqrt{1+\frac{1}{13\,689}}=\frac{117}{37}+\frac{1}{2\cdot 37\cdot 117}-\frac{1}{8\cdot 37\cdot 117^3}+\ldots,$$

már a 3. tag kisebb a megengedett hibakorlátnál. Az első két tagból a $27\,379/8658$ közelítő érték adódik, aminek négyzete $10+1/74\,960\,964$.

Somogyi Árpád (Budapest, Fazekas M. gyak. g. II. o. t.)

[2]Lásd ezen számban, 144. o.
[3]Új olvasóink részére említjük, hogy az 1967/68. évtől kezdve az itt említett eljárás nem szerepel a tankönyvben. – *Szerk.*