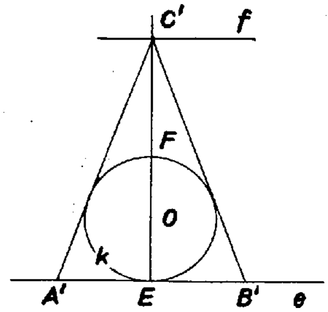
**I. megoldás.** Fordítsuk meg a feladatot, tekintsük adottnak a beírt $k$ kört és ennek $E$ pontjában az $e$ érintőt, és kérdezzük, szerkeszthetők-e $k$ köré olyan $A'B'C'$ háromszögek, melyeknek $A'$, $B'$ csúcsa $e$-n van, bennük $C'$-nek $e$-től mért $m_c$ távolsága egyenlő a $\varrho$ sugár 4-szeresével, továbbá egymás után teljesülnek az I–III szögfeltételek. Ha ugyanis ez az $A'B'C'$ háromszög megszerkeszthető, akkor az $ABC$ háromszög is, mert hasonlók, tehát a keresett háromszögek egyszerű nagyítással vagy kicsinyítéssel (hasonlósági transzformációval) megkaphatók. Ha viszont az $A'B'C'$ háromszög nem szerkeszthető, akkor az $ABC$ háromszög sem.

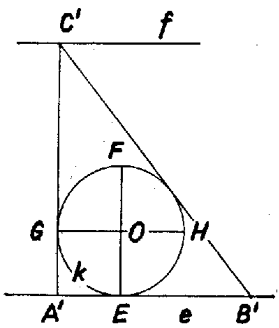
Legyen $k$-nak $E$-vel átellenes pontja $F$ és $e$ tükörképe $F$-re az $f$ egyenes; $C'$-nek ezen kell rajta lennie.



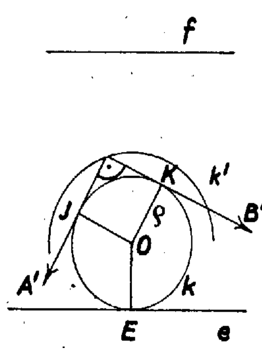

*1. ábra*

Az I. esetben a háromszög egyenlő szárú, $B'C' = A'C'$, $C'$-t az $EF$ egyenes metszi ki $f$-ből (1. ábra). $C'$ a $k$-ra nézve külső pont, és távolabb van $e$-től, mint $F$, ezért a $C'$-ből $k$-hoz húzott érintők $E$ két oldalán metszik $e$-t, az $A'$, $B'$ metszéspontokkal és $C'$-vel meghatározott háromszög a belsejében tartalmazza $k$-t, és nyilvánvalóan megfelel.

A II. esetben legyen $k$-nak $e$-vel párhuzamos átmérője $GH$, a $G$-beli érintőnek $e$-vel és $f$-fel való metszéspontja $A'$, ill. $C'$, és a $C'$-ből húzott második érintőnek $e$-vel való metszéspontja $B'$, így az $A'B'C'$ háromszög nyilvánvalóan megfelelő (2. ábra).




*2. ábra*




*3. ábra*

A III. esetben $C'$, a kör $O$ középpontja és a $C'A$, $C'B$ befogón levő $J$, ill. $K$ érintési pontja egy négyzet 4 csúcsát adja (3. ábra), így $C'$-nek az $O$ körüli $\sqrt{2}\varrho$ sugarú $k'$ körön kellene lennie (ennek sugara egyenlő a 2. ábra $OA'$ szakaszával). Ennek azonban nincs közös pontja $f$-fel, $\sqrt{2}\varrho < 3\varrho$, tehát ilyen háromszög nem szerkeszthető.

Ezzel a feladatot megoldottuk, az I–II. esetekben válaszunk igenlő, a III. esetben tagadó.

*Kőnig Imre* (Budapest, Kölcsey F. g. II. o. t.)

**II. megoldás.** Legyen a keresett háromszögbe írható kör sugara $\varrho$, akkor a feladat szerint a $C$ csúcshoz tartozó magasság $m_c = 4\varrho$. Ismeretes, hogy $\varrho = \dfrac{2t}{a+b+c}$, ahol a háromszög $2t$ kétszeres területe esetünkben $2t = c\cdot m_c = 4\varrho c$, tehát

$$\varrho(a+b+c) = 4\varrho c,$$

amit $\varrho(>0)$-val osztva és rendezve kapjuk, hogy

$$a+b=3c. \tag{1}$$

Mármost az I. esetben $a=b=3c/2$.

A II. esetben Pitagorasz tétele szerint

$$c^2=a^2-b^2=(a+b)(a-b),$$

így (1) alapján

$$a-b=\frac{c^2}{a+b}=\frac{c^2}{3c}=\frac{c}{3},$$

majd ismét (1) alapján $a=5c/3$, $b=4c/3$.

A III. esetben Pitagorasz tétele szerint $c^2=a^2+b^2$, másrészt átalakítással, majd (1)-et felhasználva

$$a^2+b^2=\frac{2a^2+2b^2}{2}=\frac{(a+b)^2+(a-b)^2}{2}\geq\frac{(a+b)^2}{2}=\frac{9}{2}c^2,$$

tehát nincs a feladatnak eleget tevő háromszög.

Az I–II. esetben tehát a keresett háromszög megszerkeszthető a további két oldala alapján, a III. esetben viszont nincs megoldása a feladatnak.

*Hadik Róbert* (Makó, József A. g. I. o. t.)
*Kálmán Miklós* (Budapest, Fazekas M. gyak. g. I. o. t.)