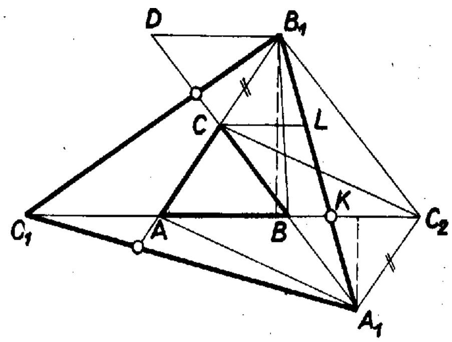
I. megoldás. Messe az A_1B_1 egyenest AB a K pontban, és legyen B tükörképe C-re D. Ekkor B_1D párhuzamos AB-vel – hiszen B_1D az AB tükörképe C-re –, másrészt B harmadolja az A_1D szakaszt, ezért K is harmadolja A_1B_1-et, $A_1K : KB_1 = 1 : 2$ (1. ábra).



1. ábra

A B_1C_1 oldal ugyanazzal a szerkesztéssel áll elő az A, C, B pontхármasból, ahogyan A_1B_1-et kaptuk C, B, A-ból, ezért BC ugyancsak $1 : 2$ arányban osztja B_1C_1-et, s ugyanígy CA is C_1A_1-et.

Az ABC háromszög szabályos voltából semmit sem használtunk fel, így megállapításunk tetszés szerinti háromszögre érvényes.

Dettai István (Pannonhalma, Bencés g. I. o. t.)
Angster Judit (Pécs, Nagy Lajos g. I. o. t.)

II. megoldás. Messe az AB-vel C-n át húzott párhuzamos A_1B_1-et L-ben. Ekkor CL az AB_1K háromszög középvonala, BK pedig az A_1CL háromszögé; ezért egyrészt L felezi B_1K-t, másrészt K felezi LA_1-et: $B_1L = LK = KA_1$. Így pedig $A_1K : KB_1 = 1 : 2$. – Ugyanígy okoskodhatunk a többi oldalakra vonatkozóan is.

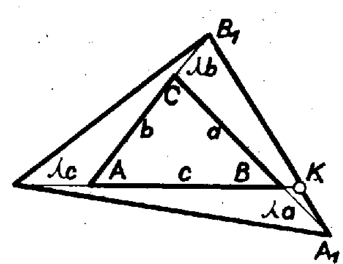
Terlaky Edit (Kaposvár, Táncsics M. g. I. o. t.)
Győry Jenő (Budapest, Berzsenyi D. g. I. o. t.)

III. megoldás. Messe az A_1-ből AB_1-gyel párhuzamosan húzott egyenes az AB egyenest C_2-ben. Ekkor A_1C_2 a CA tükörképe B-re, így egyenlő vele, tehát B_1C-vel is. Az $A_1C_2B_1C$ paralelogramma átlói felezik egymást, amiből következik, hogy A_1B_1 az A_1C_2C háromszög egyik súlyvonalának egyenese. C_2B egy másik súlyvonal, így K a háromszög súlypontja, tehát A_1K a súlyvonal kétharmada, s így az A_1B_1 távolság egyharmada.

Soós Miklós (Budapest, Fazekas M. gyak. g. II. o. t.)

IV. megoldás. A keresett A_1K/KB_1 távolságarány megegyezik az A_1 és B_1 pontok AB oldalegyenestől mért távolságának arányával. Ezek a távolságok ABA_1 és ABB_1 háromszögek közös oldalára bocsátott magasságai; így a háromszögek területének aránya is a keresett arányt adja.

Az ABB_1 háromszög területe az ABC háromszög területének a kétszerese, mert az ABB_1 háromszög területét a BC súlyvonal felezi. Az ABC háromszög területe viszont egyenlő az ABA_1 háromszögével, mert az AA_1C háromszög területét az AB súlyvonal felezi. Így az ABB_1 háromszög területe az ABA_1 háromszögének kétszerese, tehát B_1K a KA_1 szakasz kétszerese.



$(\lambda=2/5,\ \lambda/(1+\lambda)=2/7)$

2. ábra

Megjegyzés. Ha az ABC háromszög oldalainak a meghosszabbítására rendre a megfelelő oldalak λ-szorosát mérjük fel, akkor – mint az a fentiekhez hasonlóan könnyen belátható – (2. ábra):

$$\frac{A_1K}{KB_1}=\frac{t_{ABA_1}}{t_{ABB_1}},\quad t_{ABB_1}=t_{ABC}+t_{BB_1C},\quad t_{BB_1C}=\lambda t_{ABC},\quad t_{AA_1B}=\lambda t_{ABC}.$$

Így

$$\frac{A_1K}{KB_1}=\frac{\lambda\cdot t_{ABC}}{(1+\lambda)\cdot t_{ABC}}=\frac{\lambda}{1+\lambda}.$$

Esetünkben $\lambda = 1$ volt, így az arány értéke $1/2$.