I. A gyökjel előtti pozitív szorzókat a gyökjel alá vive és elvégezve a műveleteket, és a kínálkozó egyszerűsítéseket, minden esetben az első gyökmennyiséget kapjuk. Figyeljük meg, hogy a gyökjel alatti nevező minden esetben osztója a gyökjel előtt álló tört számlálója négyzetének. Jelöljük a-val azt a számot, aminek a négyzetgyökét akarjuk kifejezni, x/y-nal a gyökjel előtti törtet, ekkor x-et a gyökjel alá víve az elmondottak szerint ilyen alakú összefüggéseket kapunk:

$$\sqrt{a}=\frac{1}{y}\sqrt{x^2+z},$$

ahol x, y pozitív egész és z olyan egész, amelyre $|z|<x^2$. Átszorozva y-nal és négyzetre emelve

$$ay^2=x^2+z. \tag{2}$$

Ha találunk ennek eleget tevő x, y, z-t, akkor ezekkel fennáll a következő összefüggés is:

$$\sqrt{a}=\frac{x}{y}\sqrt{1+\frac{z}{x^2}}. \tag{3}$$

Ez annál érdekesebb, minél kisebb $|z|$. A fenti példákban az $(x|y|z)$ hármasok $a=2$ esetén $((3|2|-1)$, $(4|3|2)$, $(7|5|1)$, $(10|7|-2)$; $a=3$-hoz $(7|4|-1)$, $(12|7|3)$; $a=5$-höz $(20|9|5)$ és $a=10$-hez $(10|3|-10)$. Ezekben a példákban z osztója x^2-nek, ehhez azonban nem kell ragaszkodnunk.

Megfigyelhetjük viszont azt is, hogy amelyik példákban a gyökjel alatti nevező nem négyzetszám, ott a külső tört számlálója ay' alakú, a belső nevező pedig ay'^2, amit beírva a

$$\sqrt{a}=\frac{ay'}{x'}\sqrt{1+\frac{z'}{ay'^2}} \tag{4}$$

alakra jutunk (példáinkban z' mindig 1 vagy -1). Innen átrendezéssel az

$$ay'^2=x'^2+z'$$

összefüggést kapjuk, ami csak a betűk mellé tett vesszőkben tér el (2)-től. Így (2) minden megoldásából (3), ill. (4) alapján $\sqrt{a}$-t előállíthatjuk a gyökjel alatt összeggel is, különbséggel is.

II. Az 5-höz és 10-hez fent megadott előállításokból leolvasható a

$$\sqrt{5}=\frac{45}{20}\sqrt{1-\frac{5}{405}}=\frac{9}{4}\sqrt{1-\frac{1}{81}}$$
$$\sqrt{10}=\frac{30}{10}\sqrt{1+\frac{10}{90}}=3\sqrt{1+\frac{1}{9}}$$

előállítás, vagy az

$$5\cdot 3^2=7^2-4,\quad 5\cdot 17^2=38^2+1,\quad 10\cdot 7^2=22^2+6,\quad 10\cdot 6^2=19^2-1$$

egyenlőségekből

$$\sqrt{5}=\frac{7}{3}\sqrt{1-\frac{4}{49}}=\frac{15}{7}\sqrt{1+\frac{4}{45}}=\frac{38}{17}\sqrt{1+\frac{1}{1444}}=\frac{85}{38}\sqrt{1-\frac{1}{1445}};$$
$$\sqrt{10}=\frac{22}{7}\sqrt{1+\frac{3}{242}}=\frac{35}{11}\sqrt{1-\frac{3}{245}}=\frac{19}{6}\sqrt{1-\frac{1}{361}}=\frac{60}{19}\sqrt{1+\frac{1}{360}}.$$

Hasonlóan a további gyökalapokhoz egy-egy $(x|y|z)$ számhármast választva:

$$6\cdot 2^2=5^2-1,\quad 7\cdot 3^2=8^2-1,\quad 11\cdot 3^2=10^2-1,\quad 13\cdot 5^2=18^2+1,$$
$$14\cdot 4^2=15^2-1,\quad 15\cdot 8^2=31^2-1,\quad 16\cdot 3^2=13^2-25,\quad 26\cdot 1^2=5^2+1.$$

Ezekből

$$\sqrt{6}=\frac{5}{2}\sqrt{1-\frac{1}{25}}=\frac{12}{5}\sqrt{1+\frac{1}{24}};\qquad \sqrt{7}=\frac{8}{3}\sqrt{1-\frac{1}{64}}=\frac{21}{8}\sqrt{1+\frac{1}{63}};$$
$$\sqrt{11}=\frac{10}{3}\sqrt{1-\frac{1}{100}}=\frac{33}{10}\sqrt{1+\frac{1}{99}};\qquad \sqrt{13}=\frac{18}{5}\sqrt{1+\frac{1}{324}}=\frac{65}{18}\sqrt{1-\frac{1}{325}};$$
$$\sqrt{14}=\frac{15}{4}\sqrt{1-\frac{1}{225}}=\frac{56}{15}\sqrt{1+\frac{1}{224}};\qquad \sqrt{15}=\frac{31}{8}\sqrt{1-\frac{1}{961}}=\frac{120}{31}\sqrt{1+\frac{1}{960}};$$
$$\sqrt{16}=\frac{13}{3}\sqrt{1-\frac{25}{169}}=\frac{48}{13}\sqrt{1+\frac{25}{144}};\qquad \sqrt{26}=5\sqrt{1+\frac{1}{25}}=\frac{26}{5}\sqrt{1-\frac{1}{26}}.$$

Megjegyzések. 1. Ha $a=16$, akkor ay^2 is teljes négyzet s így z abszolút értéke mint két négyzetszám különbségéé, mindig 1-nél nagyobb, de erre már a korábbiakban is láttunk példát.

2. Az átalakítások felhasználhatók a gyököknek az 1109. gyakorlat [1] alapján való gyorsabb kiszámításában.

[1] Lásd ezen számban 151. old.