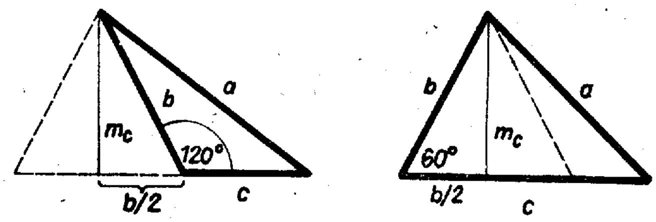
I. megoldás. A c oldallal szemben fekvő csúcsból húzott magasság az α szög csúcsával mindkét esetben egy szabályos háromszög felét adja, így – mint ismeretes – (1. ábra)

$$m_c = \frac{b\sqrt{3}}{2}, \quad \text{ezért} \quad t = \frac{cm_c}{2} = \frac{bc\sqrt{3}}{4}.$$



1. ábra

Azt kell csak belátnunk tehát, hogy

(1) $$\alpha = 60^\circ \quad \text{esetén} \quad a^2 - (b-c)^2 = bc, \quad \text{és}$$
$$\alpha = 120^\circ \quad \text{esetén} \quad a^2 - (b-c)^2 = 3bc.$$

A mondott derékszögű háromszögnek a c oldalszakaszon, ill. annak meghosszabításán levő befogója a fentiek szerint $b/2$, s így

$$a^2 = m_c^2 + \left(c - \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{3b^2}{4} + c^2 - bc + \frac{b^2}{4} = (b-c)^2 + bc,$$
$$\text{ill.} \quad a^2 = m_c^2 + \left(c + \frac{b}{2}\right)^2 = (b-c)^2 + 3bc.$$

Ezek igazolják (1)-et.

Inczédy Sarolta (Vác, Sztáron S. g. I. o. t.)

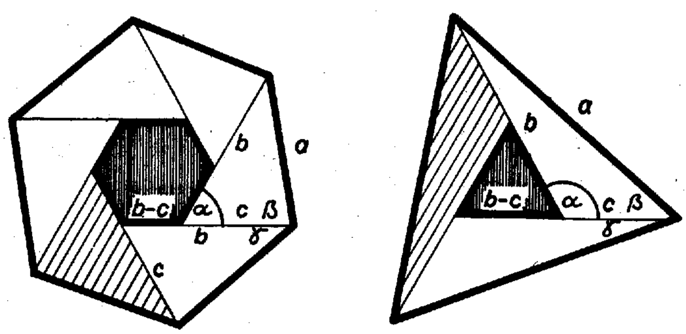
II. megoldás.[1] A két állítást

$$6t = 6\frac{a^2\sqrt{3}}{4} - 6\frac{(b-c)^2\sqrt{3}}{4}, \quad \text{ill.} \quad 3t = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} - \frac{(b-c)^2\sqrt{3}}{4}$$

alakban bizonyítjuk, felhasználva, hogy $d^2\sqrt{3}/4$ egy d oldalú szabályos háromszög $t_3(d)$ területe, ennek hatszorosa pedig egy d oldalú szabályos hatszög $t_6(d)$ területe. [2] Válasszuk a betűzést úgy, hogy $b \geq c$ legyen. Ezekkel az állítás így írható:

$$6t = t_6(a) - t_6(b-c), \quad 3t = t_3(a) - t_3(b-c),$$

vagyis pl. $\alpha = 60^\circ$ esetén háromszögünk területe annyi, mint egy a és egy $b - c$ oldalú szabályos hatszög területének különbsége.



2. ábra

Egy $b - c$ oldalú szabályos hatszög, ill. háromszög egymás utáni oldalait a 2. ábra szerint meghosszabbítva a külső szög mindig 60°, ill. 120°. Mindegyikbe egy példányt illesztve a szóban forgó háromszögünkből úgy, hogy c oldaluk essék a meghosszabbításra, 2–2 szomszédos háromszög 1–1 csúcsa egybeesik, mert $(b-c) + c = b$, és az a oldalak szabályos hatszöget, ill. szabályos háromszöget határolnak, mert mindegyik szögük

$$\beta + \gamma = 180^\circ - \alpha = 120^\circ, \quad \text{ill.} \quad \beta + \gamma = 180^\circ - \alpha = 60^\circ.$$

Ezzel az állítás nyilvánvalóvá vált.

$b = c$ esetén háromszögünk maga is a oldalú szabályos háromszög, ill. ennek $1/3$ része – a csúcsokat a középponttal összekötő szakaszokkal szétdarabolva –, így a $6t = t_6(a)$, ill. $3t = t_3(a)$ állítás helyessége nyilvánvaló.

---

[1] A megoldás a következő műből való: *Hugo Steinhaus:* Sto zadan (Panstwowe Wydawnietwo Naukowe, Warszawa, 1958) 73–74. o.

[2] A zárójel itt nem szorzást jelöl; benne az oldal hossza van föltüntetve!