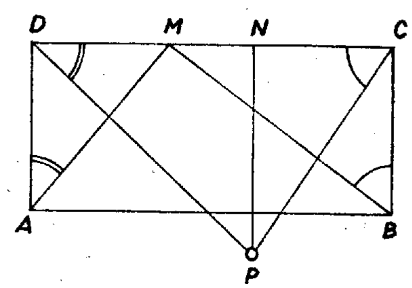
I. megoldás. $DCP\sphericalangle = CBM\sphericalangle$, és $CDP\sphericalangle = DAM\sphericalangle$, mint merőleges szárú hegyesszögek (1. ábra), így P és vele N is az AD, BC egyenespár közti sávban van. Ezért az NCP és CBM, valamint NDP és DAM derékszögű háromszögek páronként hasonlók.



1. ábra

Megfelelő befogóik arányainak egyenlőségéből osztással:

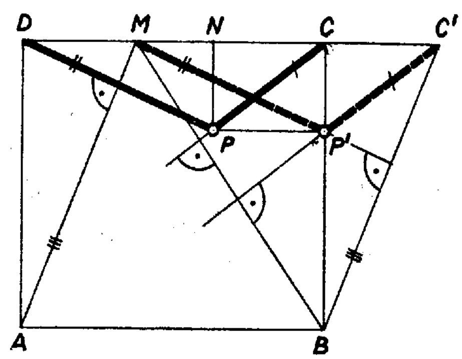
$$\frac{CN}{NP} = \frac{BC}{CM} = \frac{AD}{CM}, \qquad \frac{ND}{PN} = \frac{DA}{MD}, \qquad \frac{CN}{ND} = \frac{MD}{CM}.$$

A számlálókat két-két szakasz különbségeként írva, majd az egyenlőség mindkét oldalához 1-et adva

$$\frac{CD-ND}{ND} = \frac{CD-CM}{CM}, \qquad \frac{CD}{ND} = \frac{CD}{CM},$$

amiből $ND = CM$. Ezt kellett bizonyítanunk.

Sailer Kornél (Ózd, József A. g. I. o. t.)



2. ábra

II.megoldás. Toljuk el a CDP háromszöget úgy, hogy D csúcsa M-be jusson, és legyen új helyzete $C'MP'$ (2. ábra). Ekkor egyrészt

$$C'P' \parallel CP \perp BM, \quad \text{tehát} \quad C'P' \perp BM,$$

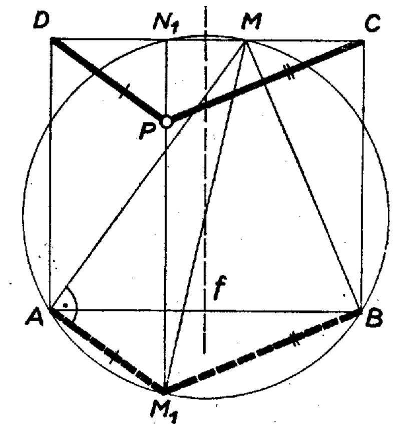
másrészt $BAMC'$ paralelogramma, így

$$MP' \parallel DP \perp AM \parallel BC', \quad \text{vagyis} \quad MP' \perp BC',$$

tehát P' a BMC' háromszög magasságpontja. Ezért BP' merőleges MC'-re, azaz CD-re, tehát azonos a BC egyenessel, vagyis P' rajta van BC-n. Így pedig az eltolás miatt $NC = PP' = DM$, és $DN = DC - NC = DC - DM = MC$, qu. e. d.

Süttő Klára (Budapest, Ságvári E. gyak. g. II. o. t.)

III. megoldás. Rajzoljunk kört az A, B és M ponton keresztül. Ez szimmetrikus az AB oldal f felező merőlegesére, ami egyben CD-nek is felező merőlegese, s így átmegy CD azon N_1 pontján, amelyre $DN_1 = MC$. Azt akarjuk belátni, hogy N azonos N_1-gyel.



3. ábra

Legyen a kör M-mel átellenes pontja M_1, akkor egyrészt M_1 merőleges vetülete CD-n N_1, mert a kör középpontja f-en van. Másrészt felhasználva Thalész tételét

$$M_1A \perp AM \perp PD \qquad \text{és} \qquad M_1B \perp BM \perp PC,$$

tehát

$$M_1A \parallel PD \qquad \text{és} \qquad M_1B \parallel PC.$$

Így az ABM_1 háromszög a DCP háromszögből a DC-re merőleges DA-val történő eltolással kapható. Ez azonban azt jelenti, hogy M_1-gyel együtt P merőleges vetülete CD-n szintén N_1, és ezt akartuk bizonyítani.

Borzsák Péter (Budapest, I. István g. I. o. t.)

Megjegyzés. Meg lehet mutatni, hogy az állítás akkor is helyes, ha M a CD egyenesnek a CD szakaszon kívül levő pontja.

Nikodémusz Anna (Miskolc, Földes F. g. II. o. t.)