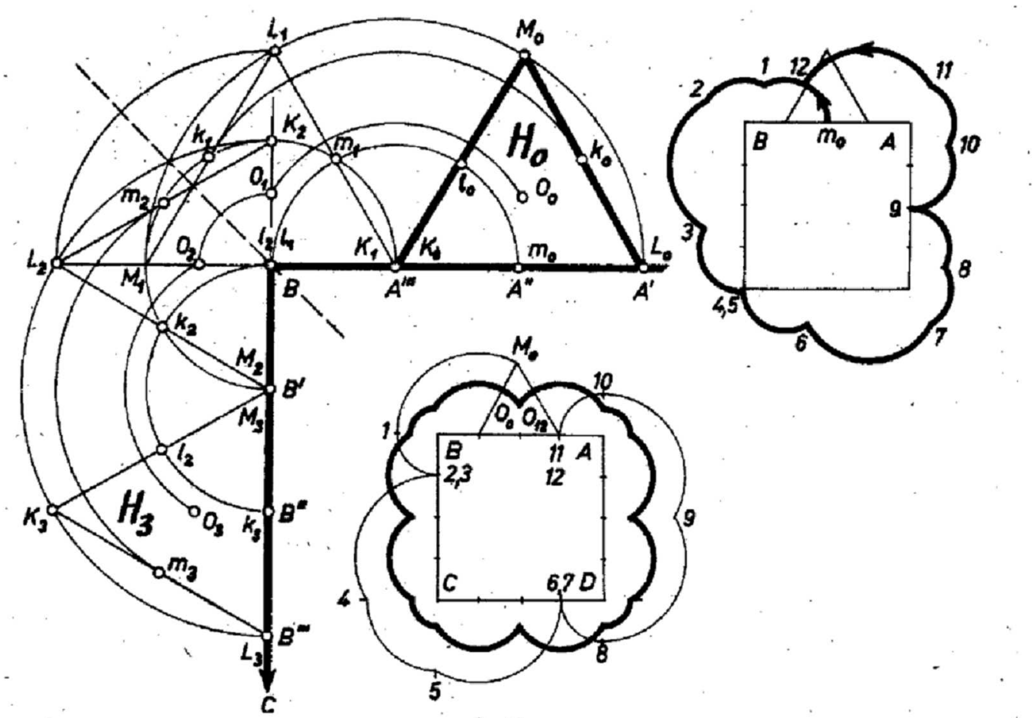
I. Legyenek az AB, ill. BC szakasz egymás utáni negyedelő pontjai A', A'', A''', ill. B', B'', B''', másrészt H egymás utáni oldalainak felezőpontjai m, k, l, középpontja O. H pontjainak 1, 2, ... befejezett elfordulás után elfoglalt helyzetét jelük mellé tett 1-es, 2-es, ... indexszel jelöljük, a kiinduló helyzetet 0 indexszel. Így m_0 egybeesik A''-vel – röviden $m_0 = A''$ –, továbbá $K_0 = A'''$, $L_0 = A'$ (1. ábra).

Az első elfordulás $K_0 = A'''$ körül 120°-kal, a teljes körülfordulás 1/3 részével megy végbe, M az AB-nek B-n túli meghosszabbítására jut, mert $M_1A''' = M_0K_0 = 1 > BA''' = 1/2$, vagyis $M_1B = 1/2$, B-be pedig az a pontja jut az MK oldalnak, amely K-tól $K_0B = A'''B = 1/2$ távolságra van, vagyis l. Így a második elfordulás középpontja $B = l_1 = l_2$, szöge 90°, 1/4 körülfordulás, $M_2 = B'$, és ez lesz a harmadik, ismét 120°-os elfordulás középpontja. Ezért $L_3 = B'''$ és $k_3 = B''$, a H_3 helyzet lényegében azonos H_0-lal, csupán K_0, L_0, M_0, k_0, l_0, m_0, valamint A és B helyére rendre L_3, M_3, K_3, l_3, m_3, k_3, ill. B és C lép, O_0 helyére pedig O_3.



1. ábra

2. ábra

3. ábra

Elég lesz tehát a kérdéses pontok eddig megtett útját megállapítanunk, ezekből teljes útjuk könnyen kiszámítható. H szabályos volta miatt az egyes elfordulási sugarak $kK = \sqrt{3}/2$, $OK = 2kK/3 = 1/\sqrt{3}$, $kl = 1/2$, $Ol = 1/2\sqrt{3}$. Az utakat a kezdő és véghelyzet egymás után való leírásával jelöljük, és az elöl fönt elhelyezett csillaggal arra emlékeztetünk, hogy nem szakaszról van szó. Az íveket a sugárnak $2\pi/3$-mal, ill. $\pi/2$-vel való szorzása útján kapjuk, így

$$^*K_0K_3 = ^*K_0K_1 + ^*K_1K_2 + ^*K_2K_3 = 0 + \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} + 1\cdot\frac{2\pi}{3} = \frac{11\pi}{12},$$

$$^*L_0L_3 = (16+3\sqrt{3})\frac{\pi}{12} \approx 5{,}55, \quad ^*M_0M_3 = \frac{11\pi}{12} \approx 2{,}88, \quad ^*O_0O_3 = \frac{19\pi}{12\sqrt{3}} \approx 2{,}87,$$

$$^*k_0k_3 = (7+4\sqrt{3})\frac{\pi}{12} = ^*m_0m_3 \approx 3{,}65, \qquad ^*l_0l_3 = \frac{2\pi}{3} \approx 2{,}09$$

(M és K, valamint m és k eddig befutott pályái tükrös helyzetűek egymással N-nek B-ből húzott szögfelezőjére nézve), továbbá H eddigi elfordulása $2\cdot 120° + 90° = 330°$, hiszen mindhárom forgás ugyanabban az irányban történt.

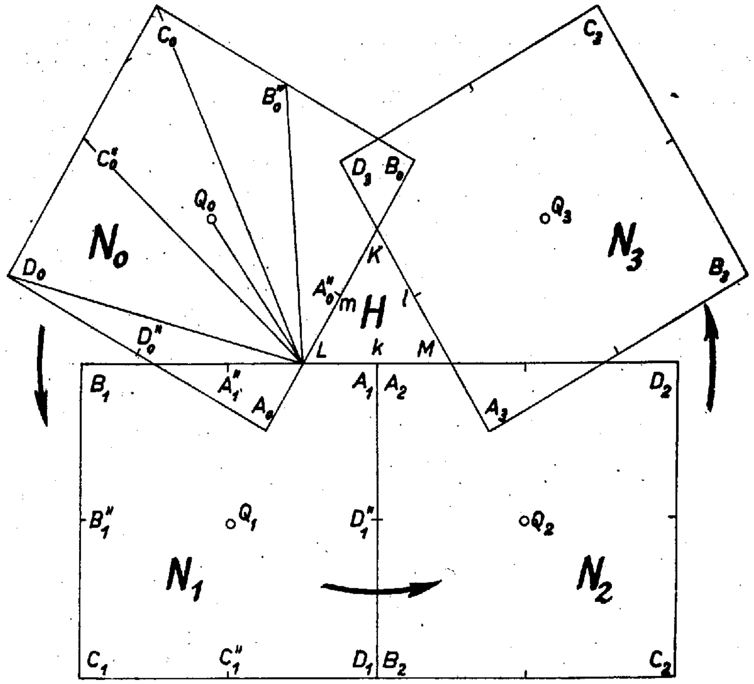
H az eddigi mozgást még 3-szor ismételve jut vissza az AB oldalra, a H_0 helyzetbe, de akkor még csak O_{12} esik egybe O_0-lal, $^*O_0O_{12} = 19\pi/3\sqrt{3} \approx 11{,}49$ egység, H-nak addigi elfordulása $8\cdot 120° + 4\cdot 90°$, ami 3 teljes fordulat és 240°, vagyis pl. $K_{12} = M_0$. Eszerint a csúcsok és oldalfelezőpontok 36 egyszerű elfordulás után jutnak először vissza eredeti helyzetükbe. Elég azonban a H_0 helyzetig számolnunk, amikor m először esik egybe N egy oldalának (DA-nak) felezőpontjával, mert nyilvánvaló, hogy addig H mindhárom csúcsa ugyanannyi utat tesz meg, úgyszintén mindhárom oldalfelező pontja is, és a kérdezett utak hossza 4-szer ennyi. Mármost pl.

$$^*K_0K_9 = ^*K_0K_3 + ^*K_3K_9 = ^*K_0K_3 + ^*M_0M_6 = (^*K_0K_3 + ^*M_0M_3) + ^*M_3M_6 =$$

$$= 2\cdot ^*K_0K_3 + ^*L_0L_3 = (38+3\sqrt{3})\pi/12$$

$$^*k_0k_9 = 2\cdot ^*k_0k_3 + ^*l_0l_3 = (11+4\sqrt{3})\pi/6,$$

eszerint a visszaérkezésig mindegyik csúcs $(38+3\sqrt{3})\pi/3 \approx 45{,}23$ egységnyi, mindegyik oldalfelező pont $(22+8\sqrt{3})\pi/3 \approx 37{,}55$ egységnyi utat tesz meg. H eddig $11\cdot 360°$-kal fordul el. O pályáját és M pályájának első harmadát a 2. ábra, m pályáját a 3. ábra mutatja.



4. ábra

II. N-et gördítve H-n, az eddigi jelöléseket használjuk, továbbá N középpontja Q (4. ábra). Az N_0 helyzetből kiindulva L körüli 120°-os, k körüli 90°-os és M körüli 120°-os elfordulás után az N_3 helyzet lényegében azonos N_0-lal, azonban a

$$K,\ M,\ L;\ k,\ m,\ l;\ A,\ D,\ C,\ B;\ A'',\ D'',\ C'',\ B'';\ Q$$

betű helyére rendre a következő lép (és az index 3-mal nő)

$$M,\ L,\ K;\ m,\ l,\ k;\ D,\ C,\ B,\ A;\ D'',\ C'',\ B'',\ A'';\ Q$$

Célszerű 12-szer kisebb hosszegységet használni, így nem lépnek fel törtek számításunkban. Pontjaink egymás utáni elfordulási sugarait a táblázat tünteti fel.

A fentiekhez hasonlóan kapjuk, hogy az N_0-lal egybevágó helyzet ismét a KL oldalon 3 ilyen, 3 – 3 egyszerű elfordulásból álló mozgásszakaszonként ismétlődik, és AB szerepe minden 4-ikben ismétlődik. 3 és 4 legkisebb közös többszöröse 12, ezért N minden csúcsa 12 ilyen mozgásszakasz, vagyis 36 egyszerű elfordulás után jut vissza kiinduló helyzetébe. Addig mind a négy csúcs ugyanannyi utat tesz meg, hasonlóan a négy oldalfelező pont is egymás között. Az utak közös hossza 3-szor annyi, mint A, B, C, D, ill. A'', B'', C'', D'' együttes útja az N_0, N_3 helyzetek között:

$$12\pi(24+2\sqrt{17}+3\sqrt{2}) \approx 1376 \text{ egység, ill.}$$

$$12\pi(5+5\sqrt{5}+2\sqrt{13}+2\sqrt{17}) \approx 1193 \text{ egység.}$$

Q viszont már 9 egyszerű elfordulás után visszajut Q_0-ba, útja $6\pi(4\sqrt{5}+3\sqrt{2}) \approx 248{,}6$ egység. Visszatérve az eredeti 1, ill. 2 oldalhosszúságok használatára, az utak: 114,7, ill. 99,4, ill. 20,7 egység. – N elfordulása ismét 11 teljes fordulat, Q visszaérkezéséig ennek negyedrésze, 990°.

Hárs László (Budapest, Kölcsey F. g. II. o. t.)
Takács László (Sopron, Széchenyi I. g. III. o. t.)
Csirmaz László (Budapest, I. István g. II. o. t.)

Megjegyzés. Az eredeti helyzetbe való első visszaérkezésig megteendő „út" – ezen szemléletesen a két idom érintkezési pontjának előhaladását értve – mindkét gördülésre kiadódik ebből az elindulásból is: H kerülete 3, N-é 8 egység, ezek legkisebb közös többszöröse 24.

Forg. közp.	A	B	C	D	A''	B''	C''	D''	Q	Szorzó
L	6	18	30	$6\sqrt{17}$	6	$6\sqrt{13}$	$6\sqrt{17}$	$6\sqrt{5}$	$6\sqrt{5}$	$2\pi/3$
k	0	24	$24\sqrt{2}$	24	12	$12\sqrt{5}$	$12\sqrt{5}$	12	$12\sqrt{2}$	$\pi/2$
M	6	$6\sqrt{17}$	30	18	$6\sqrt{5}$	$6\sqrt{17}$	$6\sqrt{13}$	6	$6\sqrt{5}$	$2\pi/3$