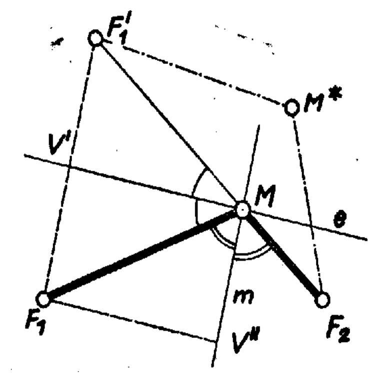
a) Legyen F_1 tükörképe e-re F_1' (1. ábra), így e az F_1F_1' szakasz felező merőlegese, és a sík bármely olyan P pontjára, amely e-nek az F_1-et tartalmazó partján van, $PF_1' > PF_1$, a többiekre $PF_1' \leq PF_1$.



1. ábra

Legyen F_1 merőleges vetülete e-n, ill. az F_1MF_2 szög m szögfelezőjén V', ill. V''. A szögfelezés és a tükrözés miatt

$$F_1'MF_2\sphericalangle = F_1'MV'\sphericalangle + V'MF_1\sphericalangle + F_1MV''\sphericalangle + V''MF_2\sphericalangle =$$
$$= 2(V'MF_1\sphericalangle + F_1MV''\sphericalangle) = 2V'MV''\sphericalangle = 180°,$$

tehát F_1' az F_2M egyenes M-en túli meghosszabbításán van, továbbá

$$F_1'F_2 = F_1'M + MF_2 = F_1M + MF_2 = s.$$

Megállapításaink akkor is helyesek, ha M éppen rajta van az F_1F_2 egyenesen (az F_1MF_2 háromszög elfajul egyenesszakasszá). Ekkor $s > F_1F_2$ miatt M csak úgy helyezkedhetik el, hogy tőle F_1 és F_2 ugyanabban az irányban van, $F_1MF_2\sphericalangle = 0°$, felezőjeként az MF_1 félegyenes tekintendő, így $e \perp F_1F_2$. Ezért F_1' az MF_1 egyenesen adódik, és M elválasztja F_1'-t F_2-től, ezért $F_1'F_2$ összeadással adódik $F_1'M$-ből és MF_2-ből.

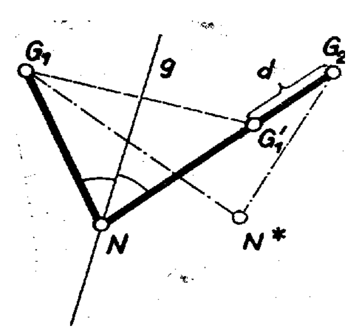
Tegyük fel az állítással ellentétben, hogy van a mozgó pontnak egy az M-től különböző M^* helyzete az e-n vagy ennek F_1-et nem tartalmazó partján. Ekkor

(1) $$F_1'M^* \leq F_1M^*, \quad \text{és mégis} \quad F_1M^* + M^*F_2 = s, \quad \text{tehát}$$
$$s^* = F_1'M^* + M^*F_2 \leq s.$$

Másrészt az M^*, F_1', F_2 pontokra a háromszögegyenlőtlenség és a fentiek alapján (gondolva szakasszá fajult háromszög lehetőségére is):

$$s^* = F_1'M^* + M^*F_2 \geq F_1'F_2 = s, \quad \text{vagyis} \quad s^* \geq s.$$

E két megállapításból $s^* = s = F_1'F_2$, ami szerint egyrészt (1)-ben egyenlőség áll, tehát M^* rajta van e-n, másrészt rajta van az $F_1'F_2$ szakaszon is, tehát azonos e szakasz és az e egyenes egyetlen közös pontjával, M-mel. Ellentmondásba jutottunk feltevésünkkel, eszerint a kérdéses M^* pályapont nem létezik. Ezt kellett bizonyítanunk.



2. ábra

b) G_1-nek g-re való G_1' tükörképe az NG_2 félegyenesen van (2. ábra), és a feltevés miatt $NG_1' = NG_1 = NG_2 - d$, ezért $G_1'G_2 = d$. Tegyük fel, hogy pontunk pályájának egy az N-től különböző N^* pontja nincs benne a g-vel kettévágott síknak G_1-et tartalmazó félsíkjában, vagyis hogy

(2) $$N^*G_1' \leq N^*G_1 \quad \text{és mégis} \quad N^*G_2 - N^*G_1 = d,$$

– ugyanis g a G_1G_1' szakasz felező merőlegese. Ezek alapján $d^* = N^*G_2 - -N^*G_1' \geq d$, viszont az N^*, G_1', G_2 ponthármasra alkalmazva a háromszög-egyenlőtlenséget

$$d^* = N^*G_2 - N^*G_1' \leq G_1'G_2 = d,$$

vagyis csak $d^* = d$ lehetséges. Emiatt egyrészt (2)-ben egyenlőség áll, N^* csak g pontja lehet, másrészt N^*, G_1', G_2 nem alkotnak valódi háromszöget, N^* a $G_1'G_2$ egyenesen van, tehát N^* – feltevésünkkel ellentétben – azonos N-nel, mint g és a $G_1'G_2$ egyenes egyetlen közös pontjával. Eszerint nincs pontunk pályájának további pontja sem g-n, sem annak G_1-et nem tartalmazó partján. Az állítást bebizonyítottuk.

Körtvélyessy Péter (Szeged, Ságvári E. gyak. g. II. o. t.)

Megjegyzés. Többen észrevették, hogy M pontunk pályája ellipszis, melynek fókuszai F_1, F_2, és nagy tengelyének hossza s, másrészt hogy N pályája egyik ága annak a hiperbolának, melynek fókuszai G_1, G_2, és főtengelyének hossza d.