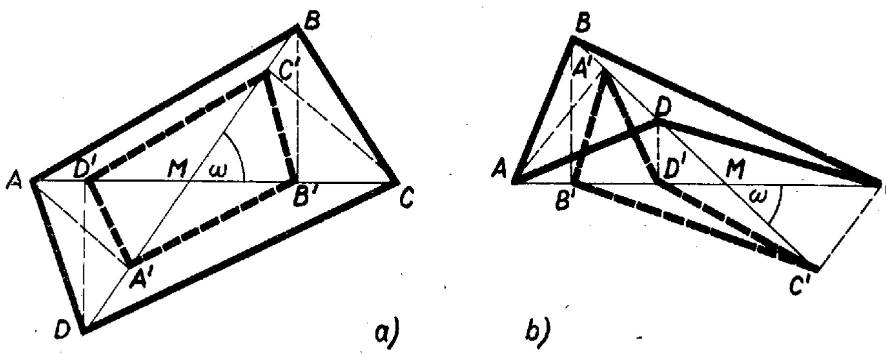
Legyen a tetszés szerinti négyszög $ABCD = N$, a csúcsokból az előírt átlóra bocsátott merőleges talppontja rendre A', B', C', D', az AC és BD átlók metszéspontja M (1. ábra). Az $A'B'C'D' = N'$ négyszög $A'C'$ és $B'D'$ átlói szintén M-ben metszik egymást, hiszen pl. $A'C'$ a BD egyenesen fekszik. Kizárjuk azt az esetet, ha $AC \perp BD$, mert ekkor – és csak ekkor – N' nem jön létre, mind a négy talppont M-be esik. Az állításnál többet mutatunk meg: N'-ben mindegyik átló rendre ugyanakkora szöget zár be az oldalakkal, mint N megfelelő átlója és megfelelő oldala, pl. $C'A'B'\sphericalangle = CAB\sphericalangle$.



1. ábra

Elég belátnunk, hogy egy MXY háromszögben – ahol $XMY\sphericalangle \neq 90°$, és az X és Y csúcsnak az MY, MX oldalegyenesen levő vetülete X', ill. Y' – fennáll $MX'Y'\sphericalangle = MXY\sphericalangle$. Valóban X', Y' mindenesetre az XY oldal mint átmérő fölé írt Thalész-kör pontjai (lásd a 2. *a)*, *b)*, *c)*, *d)* ábrákat). Ha MXY és MYX hegyesszög, akkor X', Y' az XY egyenes M-et tartalmazó partján adódnak, és $XMY\sphericalangle > 90°$ esetén $MX'Y'\sphericalangle$ és $MXY\sphericalangle$ az $XYY'X'$ konvex húrnégyszög YY' oldalának látószöge; $XMY\sphericalangle < 90°$ esetén pedig külső, ill. belső szöge az $XYX'Y'$ konvex húrnégyszögnek, és X és X' szembenfekvő csúcsok. Ugyanígy adódik $MY'X'\sphericalangle = MYX\sphericalangle$. Ha viszont pl. MYX tompaszög, akkor X' és Y' az XY egyenes két oldalán adódik, az MXY és $MX'Y'$ szögek az $XY'YX'$ konvex húrnégyszögben egyenlők. Végül pl. $MYX\sphericalangle = 90°$ esetén X' azonos Y-nal, $MX'Y'$ és MXY merőleges szárú hegyes szögek.

Az állítás mostmár úgy adódik, hogy X, Y pontpárként N egymás utáni oldalainak két végpontját vesszük, pl. $MD'A'\sphericalangle = MDA\sphericalangle$ (1. ábra).

Azt kell még belátnunk, hogy N' minden egyes szöge ugyanúgy összeadással vagy kivonással áll elő a csúcsba befutó átló és két oldal közti szögekből, mint az N megfelelő csúcsánál levő szög, pl. az A'-nél és A-nál levő szög.

Ha N konvex, vagyis M szétválasztja az A, C és B, D pontpárt, akkor N' is konvex, hiszen M pl. az $AA'CC'$ konvex trapéz átlóinak metszéspontja; ezért N és N' minden szöge összeadással adódik (1a ábra).

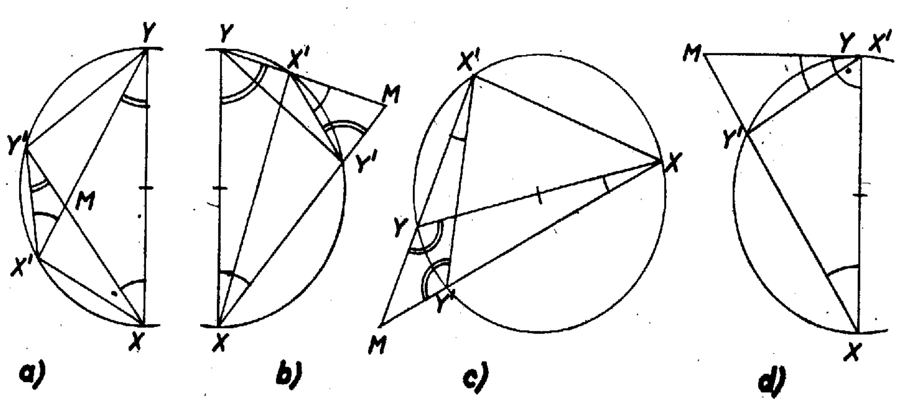
Ha pedig N konkáv, pl. az AC átlónak a B, D csúcsok ugyanazon az oldalán vannak, és a betűzés olyan, hogy D az ABC háromszög belsejében van, vagyis M a BD átló D-n túli meghosszabbításán van (másrészt A és C között), akkor D' az MB' szakaszon áll elő, másrészt M az $A'C'$ átlószakasz pontja (1b ábra). Eszerint

$$B'A'D'\sphericalangle = B'A'M\sphericalangle - D'A'M\sphericalangle = BAM\sphericalangle - DAM\sphericalangle = BAD\sphericalangle,$$

és ugyanígy adódik $B'C'D'\sphericalangle = BCD\sphericalangle$. A B, B' és D, D' csúcs-pároknál levő szögek egyenlőségét pedig összeadás útján kapjuk.

Ezzel az állítást igazoltuk. Hurkolt négyszögre az állítás nem vonatkoztatható, mert ilyen alakzat esetében nem lehet értelmezni belső és külső szögeket.

Pataki István (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., II. o. t.)
dolgozata alapján, kiegészítésekkel



2. ábra

Megjegyzések. 1. A $2a-2d$ ábrákon vizsgált két-két szög egyenlősége abból is következik, hogy az MXY és $MX'Y'$ háromszögek hasonlók. Ugyanis az MXX' és MYY' derékszögű háromszögek hasonlók, mert M-nél levő szögük vagy közös, vagy csúcsszöge egymásnak, így $MX':MY'=MX:MY$. Az aránypárt $MX':MX=MY':MY$ alakban írva látjuk, hogy az $MX'Y'\triangle$ az $MXY\triangle$-nek $\cos\omega$ arányú kicsinyítettje; ahol ω az MX, MY egyenesek közti hegyes szög.

2. Több dolgozat erre a tényre támaszkodva ezt mondta: N' az N-nek $\cos\omega$ arányú kicsinyítettje, ezért hasonlók, tehát megfelelő szögeik egyenlők. Bár az állítás igaz, ebben a megállapításban mégis hézag van: az iskolai tananyagban 3-nál több oldalú sokszögekre nem állapítottuk meg, mi elegendő feltétel a hasonlóság kimondásához, nincs tehát mire hivatkozni. Nem elegendő pl. ha két négyszög megfelelő szögei páronként egyenlők – ellenpélda a négyzet és a téglalap –, és az sem, ha a megfelelő oldalak arányai rendre egyenlők – mert így az oldalak még csuklósan mozgathatók. Ha azonban az utóbbi példában még egyik megfelelő átlópár aránya is egyenlő a mondott 4 aránnyal, ez már elegendő, mert így a két négyszög felbontható hasonló háromszögpárokra.

3. Megemlítjük, hogy N'-t az átlóegyenesek közti szögek bármelyikének felezőjére tükrözve, az N'' kép hasonló helyzetű N-höz, M-re, mint hasonlósági középpontra nézve.