α) A behelyettesítés meglepő eredményre vezet, az I–III. számhármasok esetében mindig – 286-ot kapunk, IV. és V. esetében pedig egyformán 884-et.

β) Vegyük észre, hogy K második szorzatának első tényezője azonos az első szorzat harmadik tényezőjével, a 3. szorzat 1. tényezője a 2. szorzat 3. tényezőjével, 3. tényezője pedig az 1. szorzat 1. tényezőjével, – továbbá, hogy mindegyik szorzatban a 3. tényező egyenlő az előtte álló két tényező összegével. Ezeket felhasználjuk a kívánt szorzattá alakításban. Jelöljük egy-egy betűvel az 1. szorzat 1., 2., valamint a 2. szorzat 2. tényezőjét:

$$x+2y+3z=A, \qquad 2x-y-z=B, \qquad 2y-z-x=C,$$

ekkor K így írható, majd alakítható:

$$\begin{aligned} K &= AB(A+B)+(A+B)\cdot C\cdot(A+B+C)+(A+B+C)\cdot\left[A-(A++C)\right]\cdot A= \\ &= AB(A+B)+(A+B+C)(BC-AB)=B\left[(A^2+AB)+\left(C^2-A^2\right)+(BC- \right. \\ &\left. -AB)\right]=BC(B+C)=(-B)\cdot(-C)\cdot(B+C). \end{aligned}$$

Itt a három tényező rendre K első, második, harmadik szorzata 2. tényezőjének (-1)-szerese, ennélfogva

$$K=(y+z-2x)\cdot(z+x-2y)\cdot(x+y-2z). \tag{1}$$

γ) Itt a 2. tényező úgy képezhető az 1.-ből, a 3. tényező is a 2.-ból (végül még az 1. is a 3.-ból), hogy az x, y, z betű helyére rendre y, z, x betűt írunk, a szokásos kifejezéssel: x-et, y-t és z-t ciklikusan fölcseréljük. Ugyanígy áll elő a III. számhármas az I-ből, ez a magyarázata annak, hogy III. és I. esetében ugyanazt az értéket kaptuk K-ra, hiszen K-nak (1) alakjában így csak a tényezők sorrendje változik meg.

Azt is látjuk, hogy x, y, z helyére rendre az $x+u$, $y+u$, $z+u$ számot írva, ahol u tetszés szerinti szám, (1) tényezői változatlanok maradnak, mert pl. az elsőben $2x$ ugyanannyival változik, mint az $y+z$. Ez magyarázza meg a II. és az I. számhármasok esetében adódott egyenlőséget, $u=10$.

A IV. és V. eredmények megegyezésének magyarázatában (1) mindkét észrevett tulajdonságát fölhasználjuk: Legyen $u=-3$, ekkor a második tulajdonsága szerint a IV. számhármassal megegyező értéket ad az $x=1-3=-2$, $y=8-3=5$, $z=11-3=8$ számhármas, ebből viszont ciklikus cserével adódik az V. számhármas.

Megjegyzés. K egyszerűbb alakra hozása számos más módon is lehetséges. Pl. a szorzatok 1. tényezője helyére egy-egy új betűt bevezetve:

$$x+2y+3z=D, \qquad y+2z+3x=E, \qquad z+2x+3y=F,$$

összefüggéseinket egyenletrendszernek tekinthetjük, x-et, y-t és z-t ismeretleneknek, D-t, E-t, F-et paramétereknek tekintve. Innen

$$x=\frac{1}{18}(-5D+7E+F), \qquad y=\frac{1}{18}(D-5E+7F), \qquad z=\frac{1}{18}(7D+E-5F),$$

ezekkel az 1. szorzat 2. tényezője

$$2x-y-z=\frac{1}{18}(-18D+18E)=E-D,$$

amit fönt is észrevettünk. Hasonlóan a 2. és a 3. szorzat 2. tényezője $F-E$, $D-F$. K-nak így adódó

$$S=D\cdot(E-D)\cdot E+E\cdot(F-E)\cdot F+F\cdot(D-F)\cdot D$$

alakját sem nehéz $(E-D)(F-E)(D-F)$ alakra hozni.

Nem lehetne viszont hasonló alakítást végezni pl. az 1. szorzat tényezőit véve paramétereknek, mert – mint láttuk – ezek nem függetlenek egymástól.

Csirmaz László (Budapest, I. István g. II. o. t.)