Csak azok a sorrendek jönnek szóba, amelyek 1-re vagy 3-ra végződnek, különben a szám osztható 2-vel, nem törzsszám. Mindkétféle végződés előtt $3 \cdot 2 = 6$ féle sorrend lehetséges, a maradó három jegyből az első helyet 3-féleképpen tölthetjük be, minden ilyen kezdés után a másik 2 jegyet még kétféle sorrendben írhatjuk le. A vizsgálandó 12 szám:

I. 2341, II. 2431, III. 3241, IV. 3421, V. 4231, VI. 4321;
VII. 1243, VIII. 1423, IX. 2143, X. 2413, XI. 4123, XII. 4213.

A számokat sorra osztjuk az egymás utáni prímszámokkal. Amelyik szám valamelyik osztásban 0 maradékot ad (és persze a hányados nagyobb 1-nél), azt töröljük, mert nem prímszám.

A II., IV., VII. és XII. szám osztható 11-gyel, mert pl. az elsőben $(1+4)-(3+2)=0$, ami osztható 11-gyel.[1] A próba szerint a III. és a XI. szám osztható 7-tel, a X. szám 19-cel, és a VI. szám 29-cel. 2341-et az egymás utáni

$$3,\ 5,\ 7, 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 23,\ 29,\ 31,\ 37,\ 41,\ 43,\ 47$$

páratlan prímszámokkal osztva minden esetben maradék lép föl, tehát 2341 prímszám. Nagyobb prímszámmal ugyanis már fölösleges próbálkozni, mert ha pl. 53 osztója volna 2341-nek, akkor a $2341 : 53 = q$ hányados egész szám volna, éspedig 53-nál kisebb, hiszen $53q = 2341 < 2809 = 53^2$, amit 53-mal osztva $q < 53$. Így pedig q nem lehetne prímszám a végzett osztási próbák miatt, de összetett szám sem, mert akkor lenne prímszám-osztója a fenti felsorolásban. Hasonlóan nem osztható 2341 a nála kisebb és 47-nél nagyobb prímszámok egyikével sem. A 47-tel való próba viszont még szükséges volt, mert $47^2 = 2209 < 2341$.

Általában, egy szám prímfelbontását keresve elég azokkal a prímekkel próbálkozni, amelyeknek a négyzete nem nagyobb a számnál. Valóban, ha n összetett szám: $n = a \cdot b$, és itt $1 < ab \leqq b$, akkor $n = ab \geqq a^2$, $a \leqq \sqrt{n}$, így vagy a, vagy a-nak prímosztója n-nek is prímosztója.

Ennek alapján a 4231 számnak a 61-ig, 1423-nak a 37-ig és 2143-nak a 43-ig terjedő prímekkel való és minden esetben maradékkal végződő osztási próbája után kimondható, hogy az illető szám prímszám.

Mindezek szerint a kérdéses számok között 4 prímszám van.

Fodor Zsuzsa (Pápa, Türr I. g. I. o. t.)

[1] Egy természetes szám akkor és csak akkor osztható 11-gyel, ha a (jobbról számítva) páratlan sorszámú helyeken álló számjegyeinek összegéből kivonva a páros sorszámú helyeken álló számjegyeinek összegét, 11-gyel osztható számot kapunk.