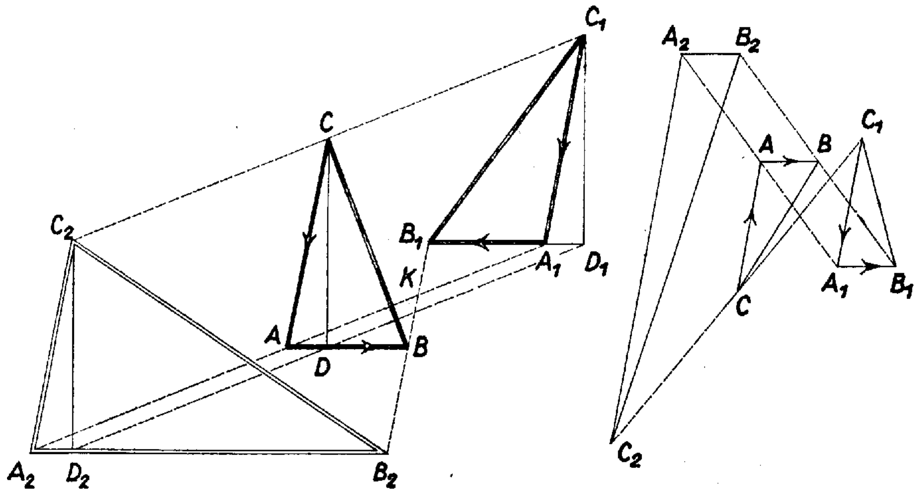
I. megoldás. A leírt helyzet létrejön pl. az 1. ábra szerint, úgy, hogy a CA, C_1A_1 oldalpáron haladva egyirányban mozgunk, AB-n és A_1B_1-en pedig ellentétes irányban; így A-ban balra, A_1-ben pedig jobbra fordulunk el előző menetirányunkhoz képest. Legyen A_1, B_1, C_1 tükörképe rendre az A, B, ill. C középpontra nézve A_2, B_2, C_2, a velük meghatározott háromszög H_2.



1. és 2. ábra

A $CA\#C_1A_1$ feltevés miatt CAA_1C_1 paralelogramma, tehát CC_1 és AA_1 egyirányúan párhuzamosak és egyenlők, ezért ugyanez áll a tükrözésükkel előálló CC_2, AA_2 szakaszokra, tehát CC_2A_2A paralelogramma, és így C_2A_2 párhuzamos, egyirányú és egyenlő CA-val és C_1A_1-gyel.

$AB\#A_1B_1$ miatt ABA_1B_1 paralelogramma, átlói AA_1 és BB_1, legyen metszéspontjuk K. Így $KA = AA_1/2$, $KA_2 = 3 \cdot AA_1/2$, továbbá $BB_2 = BB_1$ és $KB = BB_1/2$ miatt $KB_2 = 3 \cdot BB_1/2$, és A_2 a KA félegyenesen, B_2 a KB-n van. Eszerint a KA_2B_2 és KAB háromszögek hasonló helyzetűek a K középpontra nézve, a nagyítás aránya $3:1$, tehát $A_2B_2 \parallel AB \parallel A_1B_1$, és $A_2B_2 = 3 \cdot AB$.

Így a H, H_1, H_2 háromszögben a, CD, C_1D_1, ill. C_2D_2 magasságok is párhuzamosak, ezért az ACD, $A_1C_1D_1$, $A_2C_2D_2$ szögek, mint egyállású szögek, egyenlők, az ezeket tartalmazó derékszögű háromszögek az átfogók már belátott egyenlősége miatt egybevágók, tehát $CD = C_1D_1 = C_2D_2$. (Amennyiben CA merőleges AB-re, akkor D, D_1, D_2 rendre azonos az A, A_1, A_2 csúccsal.)

Mindezek szerint, a területet is az illető háromszög jelével jelölve

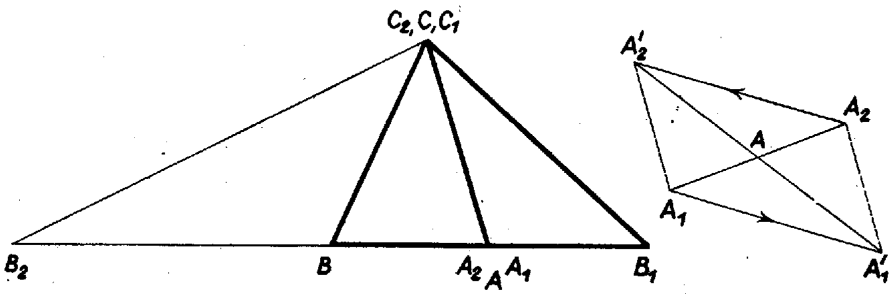
$$H = \frac{1}{2}AB \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot A_1B_1 \cdot C_1D_1 = H_1, \quad \text{és} \quad H_2 = \frac{1}{2}A_2B_2 \cdot C_2D_2 = \frac{1}{2} \cdot 3AB \cdot CD =$$
$$= 3H = 3H_1.$$

Ezt kellett bizonyítanunk.

A feladatban leírt helyzet még egy módon létrejöhet. Ha H és H_1 előírt körüljárásában az AB, A_1B_1 oldalpáron haladva ugyanabban az irányban mozgunk, akkor az ellentétes irányú körüljárás csak úgy adódhatott, ha az előző CA, C_1A_1 oldalpáron ellentétes irányban mozogtunk (2. ábra). Ebből a helyzetből a B, C, valamint B_1, C_1 betűpárok fölcserélésével a fentit kapjuk, és az új betűzés szerinti körüljárások is egymással ellentétes irányúak, mert az új irány mindkét háromszögben ellentétes irányú az eredetivel.

Fiala Tibor (Budapest, Rákóczi F. g. II. o. t.)

II. megoldás. Egyszerű helyzet adódik, ha A_1 egybeesik A-val és C_1 a C-vel (3. ábra), hiszen két egyenes egybeesése a párhuzamosság különleges esete; más szóval ugyanaz az egyenes játssza AC és A_1C_1 szerepét. Ebben a helyzetben ugyanis A_2 is A-ba esik, C_2 a C-be, továbbá B és B_1 egymás tükörképei A-ra, B_2 is az AB egyenesen adódik, vagyis mindhárom háromszögnek egy oldala – AB, A_1B_1, ill. A_2B_2 – ugyanazon az egyenesen van. Továbbá közös az erre merőleges magasságuk is, és a bizonyítás leszűkül $A_2B_2 = 3\ AB$ belátására: A felezi BB_1-et, B felezi B_2B_1-et, tehát $A_2B_2 = AB_2 = AB + BB_2 = AB + BB_1 = AB + 2AB = 3AB$.



3. és 4. ábra

Eszerint elég azt belátnunk, hogy ha H_1-et valamilyen irányban eltoljuk a $H_1' = A_1'B_1'C_1'$ helyzetbe, és a vesszős csúcsok tükörképe a megfelelő A, B, C középpontra nézve rendre A_2', B_2', C_2', akkor az ezekkel meghatározott H_2' háromszög H_2-nek eltolt képe, tehát egybevágó vele, területük egyenlő. Pontosabban azt állítjuk, hogy H_2'-t a H_2-be a fentivel ellentétes irányú, egyenlő nagyságú eltolás viszi át. Ezt is elég egyetlen csúcsra belátni, ez pedig abból látható, hogy a szerkesztés szerint az A_2A_2' elmozdulás az A_1A_1' elmozdulás tükörképe A-ra nézve (4. ábra), más szóval A körüli $180°$-os elforgatottja. Az irány e forgatás miatt válik ellentétessé.

Ezek szerint az 1. ábra H_1 háromszögét úgy eltolva, hogy A_1 az A-ba jusson, C_1 a C-be jut, és a területek megváltozása nélkül előáll a vizsgált egyszerű helyzet.

Bajmóczy Ervin (Budapest, Ady E. Ált. Isk. (és G.) 8. o. t.)