

I. megoldás. I. A 9–13 számok összes előállítására az 1–10 egész számokból választott két különböző szám összegeként:

$$\begin{aligned} 9 &= 1 + 8 = 2 + 7 = 3 + 6 = 4 + 5, \\ 10 &= 1 + 9 = 2 + 8 = 3 + 7 = 4 + 6, \\ 11 &= 1 + 10 = 2 + 9 = 3 + 8 = 4 + 7 = 5 + 6, \\ 12 &= 2 + 10 = 3 + 9 = 4 + 8 = 5 + 7, \\ 13 &= 3 + 10 = 4 + 9 = 5 + 8 = 6 + 7. \end{aligned}$$

9-et 1 + 8 alakban előállítva 10-et a fel nem használt számokból 3 + 7 és 4 + 6 alakban kaphatjuk. Az első esetben 12-t és 13-at már csak a 2 + 10, ill. 4 + 9 adhatja ki, és a hátra levő 5 + 6 előállítja a 11-et, hiszen az 1–10 számok összege egyenlő a 9–13 számok összegével, ezért az első négy előállításban föl nem használt két szám összege mindig a még hátra levő összeget adja. A második esetben pedig csak a 11 = 2 + 9 és 13 = 3 + 10 előállításoknak szabad mindkét tagja.

9-et 2 + 7 alakban véve 10-re ismét két lehetőség marad: 1 + 9 és 4 + 6. Az első esetben 12 már csak 4 + 8 alakban állítható elő, és ezért 13 csak a 3 + 10 alakban, a másodikban pedig egyértelműen 12 = 3 + 9, és ezért 13 = 5 + 8.

9-et 3 + 6 alakban képezve vagy 10 = 1 + 9, vagy 10 = 2 + 8. Az első esetben csak 11 = 4 + 7 és 13 = 5 + 8 marad lehetséges, a másodikban csak 12 = 5 + 7 és 13 = 4 + 9. Utoljára a 9 = 4 + 5 előállításból kiindulva 10-re három előállítás marad fenn, viszont a 12-re csak kettő, célszerű ezzel folytatni a párokba rendezést. Véve a 12 = 2 + 10-et, már csak 11 = 3 + 8 és 13 = 6 + 7 marad; ha pedig 12 = 3 + 9, akkor 13 = 6 + 7, 11 = 1 + 10.

Ezzel a 9-es szám minden előállítását minden lehető módon teljes párokba rendezéssé fejlesztettük, minden kívánt csoportosítást előállítottunk és a következő 8 csoportosítást kaptuk:

	9	10	11	12	13
I.	1 + 8	3 + 7	5 + 6	2 + 10	4 + 9
II.	1 + 8	4 + 6	2 + 9	5 + 7	3 + 10
III.	2 + 7	1 + 9	5 + 6	4 + 8	3 + 10
IV.	2 + 7	4 + 6	1 + 10	3 + 9	5 + 8
V.	3 + 6	1 + 9	4 + 7	2 + 10	5 + 8
VI.	3 + 6	2 + 8	1 + 10	5 + 7	4 + 9
VII.	4 + 5	1 + 9	3 + 8	2 + 10	6 + 7
VIII.	4 + 5	2 + 8	1 + 10	3 + 9	6 + 7

Eszerint a számpárok összegei nem mindig határozzák meg egyértelműen a számok párokba rendezését.

II. Az 1-es szám párját 9-féleképpen választhatjuk meg a többi számok közül. Mindegyik párbaállítást 7-féleképpen folytathatjuk úgy, hogy a második pár első tagjának a még rendelkezésre álló számok legkisebbikét választjuk, mert így a pár második száma mindig 7-féleképpen választható a további 7 szám közül, tehát az ilyen továbbfejlesztések száma 9 · 7. Hasonlóan a harmadik, majd a negyedik pár első tagjának a még pár nélkül állók legkisebbikét véve, ennek párját a 3. párban 5-féleképpen, a 4. párban 3-féleképpen választ hatjuk, tehát a továbbfejlesztések száma előbb 9 · 7 · 5-re, majd 9 · 7 · 5 · 3 = 945-re emelkedik. Ennyi az 5 párba rendezés lehetőségeinek száma, mert mindig figyelembe vettük a továbbfejlesztés minden lehetőségét, ezek mind különböznek egymástól legalább egy párban, végül mert a kialakított 4 pár minden esetben meghatározza az ötödik párt is. – Eszerint az illető helyesen számolt.

Pál László (Pécs, Zipernovszky K. gépip. t. I. o. t.)
Csur Endre (Budapest, Könyves Kálmán g. II. o. t.)

II. megoldás a feladat II. kérdésére. n különböző elemből kettőt $n(n-1)/2$ -féleképpen lehet kiválasztani, mert a pár első tagjának n -féle kiválasztása után a 2. tagot csak $n-1$ -féleképpen választhatjuk, az így adódó $n(n-1)$ párba állítási lehetőség azonban minden párt 2-szer ad meg, pl. a, b és b, a alakban. Eszerint ha a cédulákra felírt 10 számunk párokba rendezését úgy hajtjuk végre, hogy egy zacskóból egymás után négyszer 2–2 cédulát húzunk ki 1–1 pár tagjaiként, és a bennmaradt 2 számot is egy párnak tekintjük, ezt

$$\frac{10 \cdot 9}{2} \cdot \frac{8 \cdot 7}{2} \cdot \frac{6 \cdot 5}{2} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2}$$

féleképpen végezhetjük el.

Így azonban minden egyes 5 párba rendezést többször is megkapunk, mégpedig annyiszor, ahányféleképpen 5 különböző tárgyat – itt a párokat – sorba lehet állítani. Erre 2 · 3 · 4 · 5 lehetőség van, mert letéve egy tárgyat, a másodikat ehhez képest 2-féleképpen helyezhetjük el: eléje és mögéje, a harmadikat 3-féleképpen: az első elé, a második elé és a második mögé s í. t.

¹Ez a feladat az Élet és Tudomány 1966. évi 49. számának rejtvényé volt.

Most már a 10 szám 5 párba állítási lehetőségeinek számát – ha a párok sorrendjét nem tekintjük – úgy kapjuk, hogy a fentebbi számot osztjuk az utóbbival:

$$\frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{2^4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 5 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 3 = 945.$$

Bárd Péter András (Budapest, Fazekas M. gyak. g. I. o. t.)