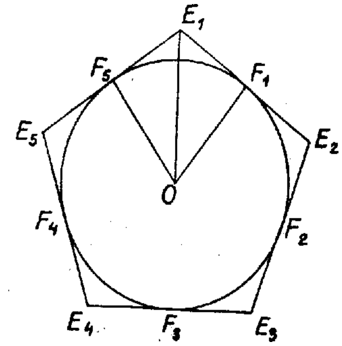
Az I. állítás igaz. Ugyanis a kör középpontját a sokszög csúcsaival összekötve egybevágó egyenlő szárú háromszögeket kapunk, és a sokszög mindegyik szöge 2-szer akkora, mint e háromszögekben az alapon fekvő szög. (Az $n = 3$ esetben az állítás helyes volta egyszerűbben adódik a kör felhasználása nélkül, hiszen minden háromszög körbeírt.)

A II. állítás hamis. $n = 4$ esetén a rombusz megfelel a feltételeknek – beírt körének középpontja az átlók metszéspontja –, de szögei általában nem egyenlők.

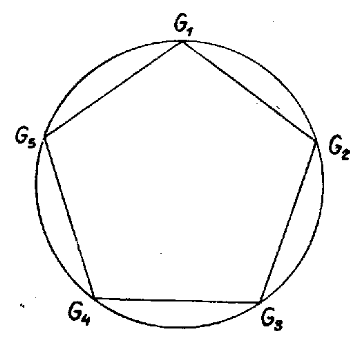
A III. állítás szerint ha egy körbeírt n-szög szögei egyenlők, akkor oldalai is egyenlők. Ez hamis, $n = 4$ esetén a téglalap megfelel a feltételeknek, de oldalai általában nem egyenlők.

A IV. állítás ezt mondja ki: ha egy kör köré írt n-szög szögei egyenlők, akkor oldalai is egyenlők. Ez igaz. Az n-szög bármely két szomszédos oldalának érintési pontjához húzott sugarak szöge ugyanakkora, az n-szög szögének kiegészítő szöge. Ezért bármely két ilyen sugárpár által meghatározott egyenlő szárú háromszög egybevágó, harmadik oldaluk az n-szög két szomszédos oldala érintési pontjának távolsága, mindig ugyanakkora. Ez az oldal az n-szög figyelembe vett két oldalának a közös csúcstól az érintési pontig terjedő szakaszával egyenlő szárú háromszöget alkot, mert, a körhöz külső pontból húzott érintőszakaszok egyenlők. Bármely két ilyen háromszög egybevágó, mert alapjuk és a szárak közti szögük egyenlő. Ezért az n-szög bármely két csúcsából húzott érintőszakaszok egyenlők. Így az n-szög oldalai is egyenlők, mert 2–2 érintőszakaszból tevődnek össze. ($n = 3$ esetén ez az állítás is egyszerűbben adódik a kör felhasználása nélkül.)

Az V. és a VI. állítás az I-nek speciális esete $n = 5$, ill. $n = 6$ esetére, tehát helyes, ugyanígy a XI. és a XII. állítás is, mint a IV-nek speciális esetei.



1. ábra



2. ábra

Megmutatjuk még, hogy a C_5-re és B_5-re vonatkozó VII., ill. IX. állítás helyes, a C_6-ra és B_6-ra vonatkozó VIII., ill. X. állításra viszont ellenpéldát adunk, ezek általában nem igazak.

A VII. állítás így is kimondható: az egyenlő oldalú $E_1E_2E_3E_4E_5 = Ö$ érintő ötszög szögei egyenlők. Érintse a beírt kör $Ö$-nek egymás utáni oldalait rendre F_1-ben, $\ldots$, F_5-ben (1. ábra), és legyen a kör középpontja O. Ekkor a külső pontból húzott érintők egyenlő volta miatt

$$F_5E_1 = E_1F_1 = E_1E_2 - F_1E_2 = E_2E_3 - F_2E_2 = F_2E_3,$$

azaz $Ö$ kerületét a csúcsok fenti sorrendjében bejárva egy oldalnak az érintési pont és a végpont közti szakasza egyenlő a 2-vel utána következő (valamint a 2-vel előtte levő) oldal megfelelő szakaszával. Továbbmenve

$$F_2E_3 = F_4E_5 = E_5F_5, \qquad \text{tehát} \qquad F_5E_1 = E_5F_5,$$

F_5 felezi a rajta átmenő E_5E_1 oldalt, és ugyanez áll a további érintési pontokra is. Megrajzolva az OE_i és OF_i szakaszokat ($i = 1, 2, 3, 4, 5$), mind a 10 keletkező derékszögű háromszög befogói egyenlők, a háromszögek egybevágók, és $Ö$ mindegyik csúcsánál 2-szer akkora szög van, mint e háromszögeknek az OF_i befogóval szemben levő szöge. Ezzel az állítást igazoltuk.

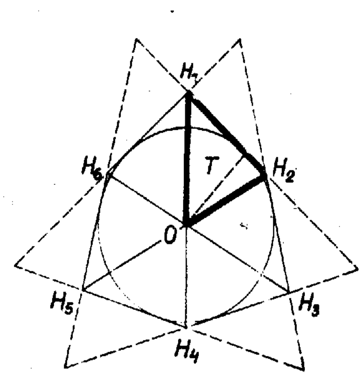
A IX. állítás: az egyenlő szögű $G_1G_2G_3G_4G_5$ húrötszög oldalai egyenlők (2. ábra). Valóban $G_5G_1G_2\sphericalangle = G_1G_2G_3\sphericalangle$ miatt a száraik között levő $G_5G_4G_2$ és $G_1G_5G_3$ ívek egyenlők. Ezért az ezeket teljes körré kiegészítő $G_5G_1G_2$ és

$G_1G_2G_3$ ívek, valamint a közös G_1G_2 részük elhagyásával adódó G_5G_1 és G_2G_3 ívek is, ennélfogva a G_5G_1 és G_2G_3 húrok is egyenlők. Más szóval, az ötszög mindegyik oldala egyenlő a rá következő második oldallal:

$$G_5G_1 = G_2G_3 = G_4G_5 = G_1G_2 = G_3G_4,$$

tehát mind az 5 oldal egyenlő. Ezt akartuk bizonyítani.

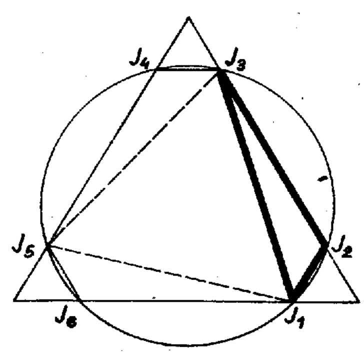
A VIII. állításra térve legyen az $OH_1H_2 = T$ háromszög O-nál levő szöge $60°$, további két szöge egymástól különböző hegyesszög, és forgassuk el T-t O körül, mindkét irányban $120°$-kal az OH_3H_4 ill. OH_5H_6 helyzetbe (3. ábra). Ekkor az OH_3H_2, OH_5H_4, OH_1H_6 háromszögek (tükrösen) egybevágók T-vel, mert pl. $OH_3 = OH_1$ és $H_2OH_3\sphericalangle = 120° - 60° = 60°$. Ezért a $H_1H_2H_3H_4H_5H_6$ hatszög oldalai egyenlők, és érintik azt az O körüli kört, melynek sugara T-nek O-ból kiinduló magassága, tehát teljesítik a C_6 feltételt. Ellenben a hatszög bármelyik két szomszédos szöge különböző, mert 2-szer akkora, mint T-nek H_1-nél, ill. H_2-nél levő szöge. (Csak minden második szög egyenlő.) Hatszögünk úgy is előállítható, hogy egy szabályos háromszöget a középpontja körül $60°$-nál kisebb, tetszés szerinti szöggel elforgatunk és vesszük az eredeti és az új háromszög közös részét.



3. ábra

Végül a X. állításra a következő szerkesztés ad ellenpéldát. Vegyünk egy szabályos háromszöget, és mérjünk fel mindegyik csúcsából a másik két csúcs felé ugyanakkora, az oldal harmadánál kisebb szakaszt (4. ábra). Nyilvánvaló, hogy a 6 végpont által meghatározott konvex hatszög körbe írható és hogy szögei egyenlők, oldalai viszont különbözők. (Csak minden második oldal egyenlő.) – Ezzel állításainkat bebizonyítottuk.

Utóbbi ellenpéldánkat a VIII. állítás ellenpéldájához hasonlóan is származtathatjuk: legyen a $J_1J_2J_3 = U$ háromszögben a J_2-nél levő szög $120°$ és $J_1J_2 < J_2J_3$, és forgassuk el U-t a köréje írt kör középpontja körül mindkét irányban $120°$-kal.



4. ábra

A VII. és IX. állítások bizonyításában közös elem volt, hogy egy-egy tulajdonság átöröklődött az ötszög valamelyik oldaláról a rá következő második oldalra és hogy 2–2 oldallal előre haladva az idom kerületén, az ötszöget 2-szer körüljárhattuk, az első körüljárásban kimaradt oldalakra is átöröklődhetett a tulajdonság. A VIII. és X. állítások esetében viszont – a hatszögben – 2–2 oldallal előre lépve 3 lépés után visszajutunk a kiindulási oldalhoz, a kihagyott oldalakra később sem juthatunk el, a tulajdonság azokra nem öröklődhet át, ill. azokon más tulajdonság öröklődik. Ebből látjuk, hogy 5 helyére nagyobb páratlan számot írva VII. és IX. megfelelője:

ha C_{2n+1}, akkor P: igaz állítás, illetőleg
ha B_{2n+1}, akkor Q: igaz állítás;
viszont VIII. és X. megfelelője:
ha C_{2n}, akkor P: hamis állítás; illetőleg
ha B_{2n}, akkor Q: hamis állítás.

Takács László (Sopron, Széchenyi I. Gimn., II. o. t.)