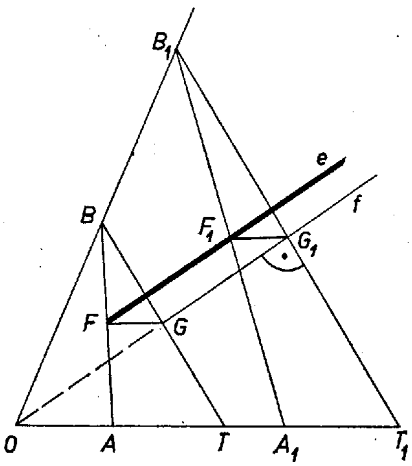
I. megoldás. a) Legyen a pontok helyzete egy tetszés szerinti időpontban A_1, B_1, az AB és A_1B_1 szakasz felezőpontja F, ill. F_1. Ekkor $OA_1 \geqq OA$, $OB_1 \geqq OB$, és – a közös sebesség állandó, vagy tetszés szerint változó voltától függetlenül – a megtett utak egyenlők: $AA_1 = BB_1$, és így a pontok O-tól mért távolságainak különbsége bármely helyzetben $OB_1 - OA_1 = (OB + BB_1) - (OA + AA_1) = OB - OA$, állandó. (A két sebességnek természetesen csak az abszolút értékét tekintjük.) Ezért – miután az egyik pont helyzetét a megfelelő szögszáron megválasztottuk – megszerkeszthetjük a másik pont ugyanazon időpontbeli helyzetét a másik száron. Néhány helyzetpárhoz megszerkesztve F_1-et, ezek egy az F-ből kiinduló félegyenesen sorakoznak, és úgy látszik, hogy a félegyenes párhuzamos az AOB szög f felezőjével. Ezt fogjuk bizonyítani.

$OA = OB$ esetén A a B tükörképe f-re, így A_1 és B_1 is tükrös pontpár, F, F_1 rajta van f-en, és F_1 az f-nek F-től távolodó félegyenesét írja le.



1. ábra

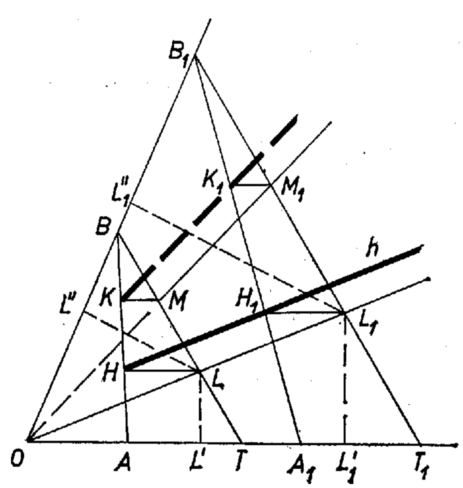
Ennek alapján könnyen bizonyíthatjuk állításunkat az $OA < OB$ esetre (1. ábra). Legyen B, B_1 tükörképe f-re T, T_1, ekkor egyrészt

(1) $$A_1T_1 = AT_1 - AA_1 = AT_1 - BB_1 = AT_1 - TT_1 = AT,$$

vagyis A_1 állandó távolságban követi T_1-et. Legyen még BT, B_1T_1 felezőpontja G, ill. G_1, ekkor, mint láttuk, G_1 az f-en halad, G-ből kiindulva és O-tól távolodva, hiszen az OB_1G_1 derékszögű háromszög hasonló OBG-hez, és így $OB_1 \geqq OB$ miatt $OG_1 \geqq OG$. Másrészt F_1G_1 a $B_1A_1T_1$ háromszögnek A_1T_1-gyel, azaz OA-val párhuzamos középvonala, így (1) szerint fele akkora, mint AT, vagyis egyenlő FG-vel, hiszen ez a BAT háromszög OA-val párhuzamos középvonala; F_1G_1 és FG ugyanezért irányban is megegyeznek. Így pedig GG_1F_1F paralelogramma, F_1 valóban csak azon az e félegyenesen lehet, amely f-nek GG_1 félegyeneséből GF irányú és nagyságú eltolással áll elő, vagyis kezdőpontja F és párhuzamos f-fel, amint állítottuk.

e minden F^* pontja hozzátartozik a mozgó pontok közti szakasz felezőpontja által leírt vonalhoz. Messe ugyanis az OA-val F^*-on át húzott párhuzamos f-et G^*-ban, a G^*-ban f-re állított merőleges OB-t B^*-ban, ekkor B^* és a B^*F^* által OA-ból kimetszett A^* a mozgó pontok F^*-ot előállító helyzetei, mert B^* f-re való tükörképét T^*-gal jelölve egyrészt $B^*T^* = 2 \cdot B^*G^*$ és $F^*G^* \parallel A^*T^*$ miatt F^* felezi A^*B^*-ot, másrészt $OB^* - OA^* = OT^* - OA^* = A^*T^* = 2 \cdot F^*G^* = 2 \cdot FG = AT = OT - OA = OB - OA$ továbbá $OG^* \geqq OG$ miatt $OB^* \geqq OB$ és $OA^* \geqq OA$, tehát a két mozgó pont áthalad B^*-on, ill. A^*-on, mégpedig ugyanabban a pillanatban.

Megjegyezzük végül, hogy az $AOB\sphericalangle = 180°$ kivételes esetben F_1 állandóan F-ben adódik.



2. ábra

b) Legyen AB-nek, A_1B_1-nek első harmadoló pontja H, ill. H_1. Ezek meghatározásában A_1 és B_1 szerepe nem egyenrangú, ezért nem nyilvánvaló, hogy tehetünk-e megszorítást OA és OB nagyságviszonyára. A 2. ábrán ismét $OA < OB$, ehhez fűzzük megoldásunkat, de vázoltuk rajta a szakasz OB-hez közelebbi K, K_1 harmadoló pontját is (hiszen így A, B betűcserével $OA > OB$, és K az A-hoz közelebbi harmadolópont). Az olvasó könnyen beláthatja, hogy nincs különbség H_1 és K_1 pályájának, mértani helyének megállapításában.

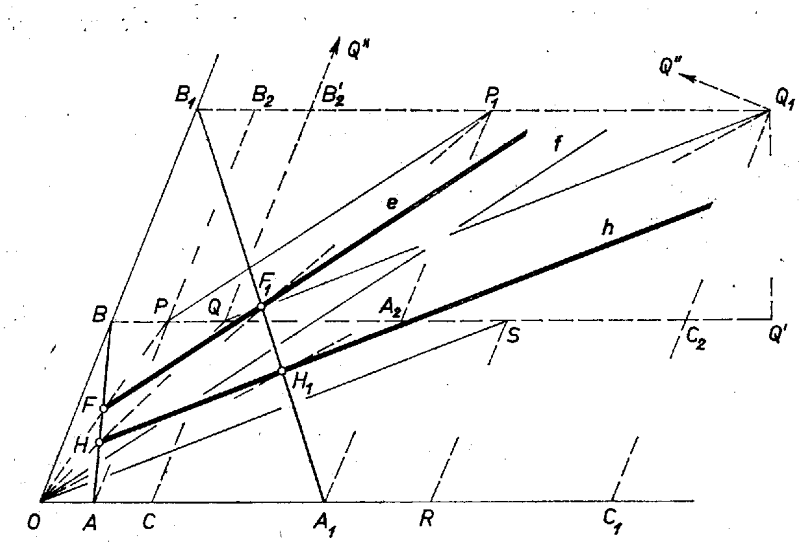
H_1 néhány helyzetének kijelölése most is azt sejteti, hogy a keresett mértani hely egy a H-ból kiinduló félegyenes. – Tekintsük ismét a B-ből indult pont tükörképének mozgását az AOB szög felezőjére (T, T_1), és jelöljük ki BT-n L-et, B_1T_1-en L_1-et úgy, hogy $HL \parallel H_1L_1 \parallel OA$. Ekkor $BH = 2 \cdot HA$, $B_1H_1 = 2 \cdot H_1A_1$, valamint (1) miatt egyrészt $HL = 2 \cdot AT/3 = 2 \cdot A_1T_1/3 = H_1L_1$, közös irányuk OA, ezért LL_1H_1H paralelogramma. Másrészt $TL : TB = AH : AB = 1 : 3 = A_1H_1 : A_1B_1 = T_1L_1 : T_1B_1$. Eszerint L, L_1 a hasonló helyzetű OBT, OB_1T_1 háromszögek O-val szemben levő oldalának megfelelő pontpárja, tehát összekötő egyenesük átmegy O-n, a hasonlósági középponton. Így HH_1 mindig párhuzamos a mozgó pontok pillanatnyi helyzetétől független OL iránnyal, vagyis H_1 azon a h félegyenesen mozog, amely H-ból indul és párhuzamos OL-lel (ugyanis $OB_1 \geqq OB$ miatt $OL_1 \geqq OL$, tehát H_1 távolodik O-tól).

Az *a*) részhez hasonlóan meg lehet mutatni, hogy h bármely pontja harmadol egy olyan A_1B_1 szakaszt, melynek végpontjai a mozgó pontok egyidejűen elfoglalt helyzetei; tehát a harmadoló pont mértani helye a h félegyenes. Ennek megmutatását az olvasóra hagyjuk.

$AOB\sphericalangle = 180^\circ$ esetén a mértani hely a H pont.

Csirmaz László (Budapest, I. István g. I. o. t.)
Szűcs András (Budapest, Fazekas M. gyak. g. II. o. t.)
Grósz Tamás (Budapest, Ságvári E. gyak. g. II. o. t.)

Megjegyzés. Az OL egyenest azzal is jellemezhetjük, hogy pontjaira nézve az OA, OB szártól mért távolságok aránya az LTL', LBL'', $L_1T_1L_1'$, $L_1B_1L_1''$ hasonló derékszögű háromszögekből $LL' : LL'' = LT : LB = L_1T_1 : L_1B_1 = L_1L_1' : L_1L_1'' = 1 : 2$. Ebben mutatkozik meg az *a*) résszel való hasonlóság, ott ugyanis f pontjaira az is áll, hogy a két távolság aránya $1 : 1$.



3. ábra

II. megoldás. *a*) Nagyítsuk ki F-et és F_1-et O-ból kétszeresére, más szóval tekintsük a BOA, B_1OA_1 háromszöget paralelogrammává kiegészítő P, P_1 pontot (3. ábra). Ekkor FF_1 az OPP_1 háromszög középvonala, tehát egyirányúan párhuzamos PP_1-gyel. Másrészt az A_1P_1 és BP, valamint AP és B_1P_1 egyenes párok metszéspontját A_2-vel, ill. B_2-vel jelölve a $PA_2P_1B_2$ paralelogramma rombusz, mert $PA_2 = AA_1 = BB_1 = PB_2$, ezért a PP_1 átló felezi az A_2PB_2 szöget, és így párhuzamos a vele egyállású AOB szög f felezőjével. Eszerint F_1 az F-ből kiindulva f-fel párhuzamosan mozog.

b) Az AB szakasz H harmadoló pontját szerkeszthetjük úgy, hogy A-n és B-n át párhuzamos egyenespárt veszünk – legyen ez AO és az iménti BP –, ezekre A-tól és B-től ellentétes irányban felmérünk egy szakaszt, ill. ennek kétszeresét: AO, ill. $BQ = 2 \cdot OA = 2 \cdot BP$, ekkor a végpontok OQ összekötő egyenese kimetszi H-t, mert a HBQ háromszög HAO-nak kétszeres nagyítása. Hasonlóan $B_1Q_1 = 2 \cdot OA_1$ és $B_1Q_1 \parallel OA$ miatt OQ_1 a H_1-ben metszi A_1B_1-et. Azt is mondhatjuk, hogy A-t, A_1-et O-ból kinagyítottuk a kétszeresére, és a kapott C, ill. C_1 ponttal adódó COB, C_1OB_1 háromszöget a Q, ill. Q_1 ponttal paralelogrammává egészítettük ki. Így egyszersmind QQ_1 a HH_1 szakasz 3-szorosára nagyította az O középpontból, tehát $HH_1 \parallel QQ_1$.

Jelöljük a C_1Q_1 és BQ, valamint CQ és B_1Q_1 egyenes párok metszéspontját C_2-vel, ill. B_2'-vel, Q_1 vetületét BQ-n, és CQ-n Q'-vel, ill. Q''-vel, így a $QC_2Q_1B_2'$ paralelogrammában $B_2'Q_1 = CC_1 = 2 \cdot AA_1 = 2 \cdot BB_1 = 2 \cdot C_2Q_1$, és mivel

$Q_1Q'C_2$ és $Q_1Q''B_2'$ hasonló derékszögű háromszögek, $Q_1Q' : Q_1Q'' = 1 : 2$. Eszerint Q_1 úgy mozog; hogy az állandó QB, QC egyenesektől mért távolságainak aránya $1 : 2$, H_1 pedig a H-ból kiindulva QQ_1-gyel párhuzamosan mozog.

(A QQ_1 irányt megadhatja pl. Az $OBSR$ paralelogramma OS átlója is, ahol R az OA száron van, és $OR = 2 \cdot OB$.)

Mind F_1, mind H_1 esetében az olvasóra bízzuk annak bizonyítását, hogy a pálya minden pontját kiadja a mozgó pontpár egy alkalmas helyzete.

Megjegyzés. Hasonlóan lehet megmutatni, hogy a mozgó pontpár közti távolságot tetszés szerinti $m : n$ arányban osztó pont ugyancsak félegyenest ír le.