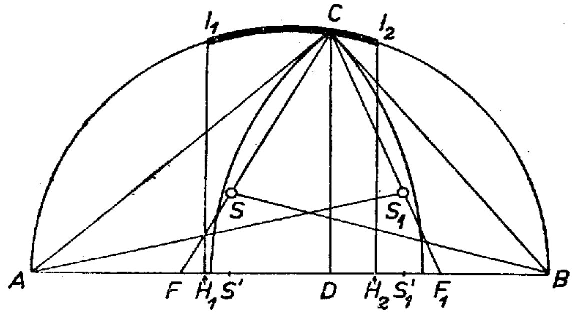
C részére más pontok szóba sem jönnek, mint az AB átmérő fölötti Thalész-kör pontjai. Legyen az ACD háromszög súlypontja S, a BCD háromszögé S_1. Az A körül AC sugárral írt kör mindenesetre tartalmazza S-et, mert tartalmazza az ACD háromszöget, a súlypont pedig belső pontja a háromszögnek. Ugyanígy S_1 benne van a B körüli, BC sugarú körben, ezért csak annak feltételét kell keresnünk, hogy az $S_1A \leq CA$ és $SB \leq CB$ követelmény egyidejűen teljesüljön (ha ti. a határoló íveket hozzászámítjuk a körök közös részéhez).



Legyen AD felezőpontja F, S vetülete AB-n S', válasszuk hosszúságegységnek AB-t, és jelöljük AD-t x-szel ($0 < x < 1$). Felhasználva az FSS' és FCD derékszögű háromszögek hasonló voltát és a súlypont harmadoló tulajdonságát,

$$S'D = 2FD/3 = AD/3 = x/3, \text{ ezért}$$

$$S'B = S'D + DB = S'D + 1 - x = 1 - 2x/3,$$

továbbá a derékszögű háromszög középarányos-tételei alapján

$$SS' = CD/3 = \sqrt{AD \cdot BD}/3 = \sqrt{x(1-x)}/3 \quad \text{és} \quad BC = \sqrt{AB \cdot DB} = \sqrt{1-x}.$$

Ezekkel az $SB \leq CB$ követelményből négyzetreemelés, a Pitagorasz-tétel alkalmazása, rendezés és a pozitív x-szel való osztás után

$$\left(1 - \frac{2x}{3}\right)^2 + \frac{x(1-x)}{9} \leq 1 - x, \quad 3x^2 \leq 2x, \quad x \leq 2/3. \tag{1}$$

Ugyanígy $BD = y (= 1 - x)$ jelöléssel az $S_1A \leq CA$ követelményből $y \leq 2/3$, azaz $x \geq 1/3$. Ezek szerint mindkét súlypont a körök közös részében van, ha $1/3 \leq x \leq 2/3$, vagyis ha D az AB szakaszt harmadoló H_1 és H_2 pontok közti szakaszon van, megengedve a szakasz végpontjait is, C pedig a H_1H_2 szakasz fölötti I_1I_2 íven. $x = 2/3$, azaz $D = H_2$ esetén (1)-ből $SB = CB$ (ezt az esetet láttuk az 1033. gyakorlatban[1]), ugyanakkor egyszerű számítás szerint $S_1A < CA$; $x = 1/3$, azaz $D = H_1$ esetén pedig $S_1A = CA$, és $SB < CB$, vagyis egyszerre csak egyik súlypont eshet a két kör közös részének határvonalára.

Szenes Katalin (Budapest, I. István g. II. o. t.)

[1] ennek a füzetnek a 213. oldalán (1966. dec.)