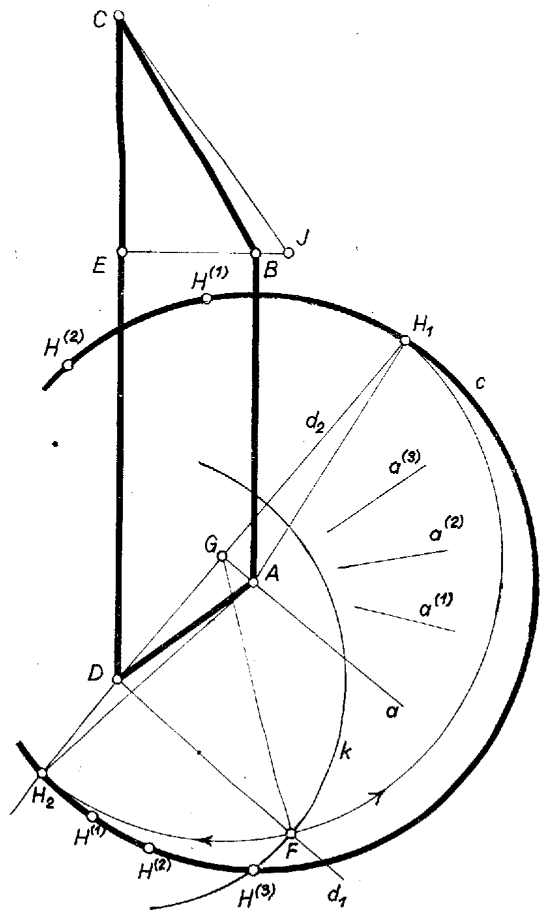
[1] d_1 és k metszéseként két pont adódik F-re, de $d_2 \perp d_1$ miatt mindkettő egyenlő messze van G-től, így a szerkesztés egyértelmű; minden esetben két H pont adódik. Végrehajtva az előírt szerkesztést az a egyenes néhány helyzetéből kiindulva, úgy látszik, hogy a H pontok egy c körön vannak, melynek középpontja A. (1. ábra, az ugyanazon helyzethez tartozó egyenesek és pontok jele fölött jobbra (1), (2), (3) index áll.) Ezért azt fogjuk bizonyítani, hogy az AH szakasz hossza független az a egyenes irányától.



Valóban, Pitagorasz tételét alkalmazva egymás után az AHG, FGD és ADG háromszögre, amelyben a szerkesztés szerint a G, D, ill. G csúcsnál derékszög van:

$$AH^2 = AG^2 + GH^2 = AG^2 + GF^2(AG^2 + GD^2) + DF^2 = AD^2 + CE^2,$$

állandó, eszerint AH egyenlő a CE szakasz mint befogó fölé az $EJ = AD$ szakasszal, mint második befogóval szerkesztett CEJ derékszögű háromszög CJ átfogójával. (Számításunk akkor is érvényes, ha $a \perp DA$, vagyis ha G az A-ban adódik.)

Megmutatjuk, hogy az A csúcs körül CJ sugárral írt c kör bármely H^* pontjához van olyan, az A ponton átmenő a^* egyenes, amelyből kiindulva az előírt szerkesztés lépéseivel adódó H pontok egyike a kiszemelt H^* pont. Valóban, az A-n át a $DH^* = d_2^*$ egyenesre állított merőleges – és csak ez – megfelel, mert a merőleges talppontját G^*-gal és a k kör a^*-gal párhuzamos – tehát d_2^*-re merőleges – átmérőjének egyik végpontját F^*-gal jelölve, az AH^*G^*, ADG^* és F^*G^*D derékszögű háromszögekből

$$G^*H^{*2} = AH^{*2} - AG^{*2} = CE^2 + AD^2 - AG^{*2} = DF^{*2} + DG^{*2} = F^*G^{*2},$$

tehát G*H*=G*F*.

Ezek szerint a H pontpárok mértani helye az A körül CJ sugárral írt kör kerülete.

Tóth Tibor (Szolnok, Verseghy F. g. II. o. t.)

Megjegyzés. Mindvégig úgy tekintettük, hogy BC ferdén hajlik az alapokhoz, vagyis $CE \neq 0$. Az így kihagyott $CE = 0$ esetben k a D pontra zsugorodik össze, F és így H egyik helyzete is D, a másik pedig D-nek a-ra való tükörképe. Mivel a mindig átmegy A-n, ekkor is mindig fennáll $AH = AD$, állandó.

[1]A feladat egy térbeli megoldását lásd ezen számban, az 56. oldalon közölt külön megjegyzésben. Ott magyarázat található a B, C, E pontok itt lényegtelennek látszó szerepére is.