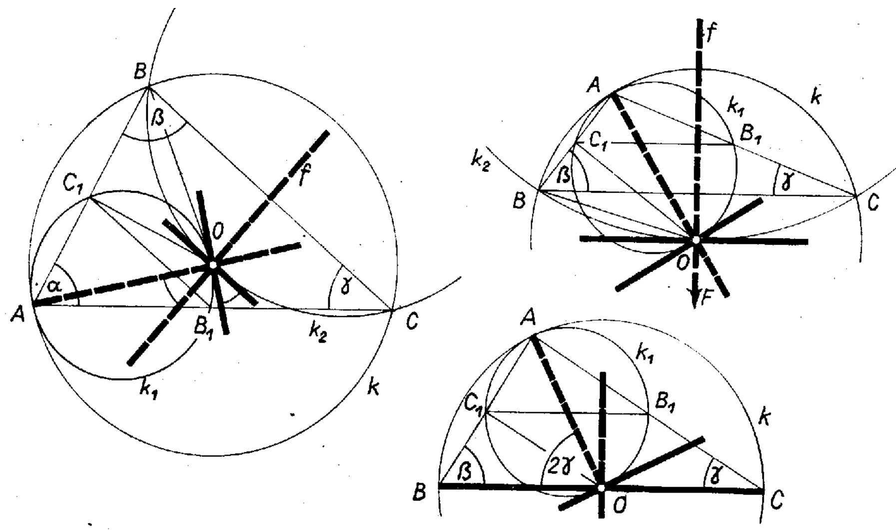
A kérdéses szögön a két kör közös pontjához tartozó érintők közti szöget értjük. A szög bármelyik közös pontban megállapítható, mert a közös pontok, és ottani érintőik is, páronként egymás tükörképei a két középpontot összekötő egyenesre; továbbá elég a két érintő közti valamelyik szöget meghatározni, a másik az azt 180°-ra kiegészítő szög.



Az A, B_1, C_1 pontokkal meghatározott k_1 kör az eredeti háromszög köré írt k kör felére való kicsinyítése az A pontból, mert az AB_1C_1 háromszög ilyen kicsinyítéssel áll elő az ACB háromszögből. Így k_1 átmegy O-n, ezért célszerű k_1 és a B, C, O pontokon átmenő k_2 kör szögét O-ban meghatározni.

A két érintő közti szögek egyenlők azokkal a szögekkel, amelyeket a két kör O-hoz tartozó sugarainak egyenesei bezárnak, hiszen a sugár merőleges az érintőre, a merőleges szárú szögek pedig vagy egyenlők, vagy kiegészítik egymást 180°-ra. Az O ponthoz a K_2-ben tartozó sugár egyenese k és k_2 centrálisa, tehát BC közös húrjuk f felező merőlegese, k_1-ben pedig az OA egyenesen van rajta az O-hoz tartozó sugár, mert OA átmérő, hiszen a felhasznált oldalfelező pontokból derékszögben látszik. Ezzel visszavezettük feladatunkat annak megállapítására, mekkora szögeket zár be az OA egyenes és a BC oldal f felező merőlegese.

Tekintsük most már f-nek O-ból kiinduló félegyenesei közül azt, amelyik az A-t nem tartalmazó BC ív F felezőpontján át lép ki k-ból, és válasszuk a betűzést úgy, hogy a háromszög szögeinek szokásos jelölésével legyen $\beta \geqq \gamma$. A $\beta > \gamma$ esetben az FBA ív nem nagyobb félkörnél, így az FOA szöget az OB félegyenessel kettévágva, a középponti és kerületi szögek tételei alapján

$$\begin{aligned} FOA\sphericalangle &= FOB\sphericalangle + BOA\sphericalangle = 2\cdot FAB\sphericalangle + 2\cdot BCA\sphericalangle = CAB\sphericalangle + 2\gamma = \\ &= \alpha + 2\gamma = 180^\circ - (\beta - \gamma). \end{aligned}$$

Eszerint f-nek másik félegyenese az OA félegyenessel $\beta - \gamma$ szöget zár be, és a keresett szög ezzel egyenlő. – Ha pedig az adott háromszögben $AB = AC$, vagyis $\beta = \gamma$, akkor közvetlenül látható, hogy a kérdéses körök érintik egymást, szögük 0°, hiszen a középpontjaik rajta vannak a háromszög szimmetria-tengelyén.

Sax Gyula (Budapest, Kölcsey F. Gimn. I. o. t.)

Megjegyzés. Ha speciálisan $\alpha = 90^\circ$, akkor O rajta van a BC átfogón, k_2 nem jön létre, hiszen egy körnek egy egyenesen legfeljebb 2 pontja lehet. Könnyű belátni, hogy eredményünk erre az esetre úgy értelmezhető, hogy a BC átfogóegyenes és a k_1 kör közti szög $|\beta - \gamma|$.