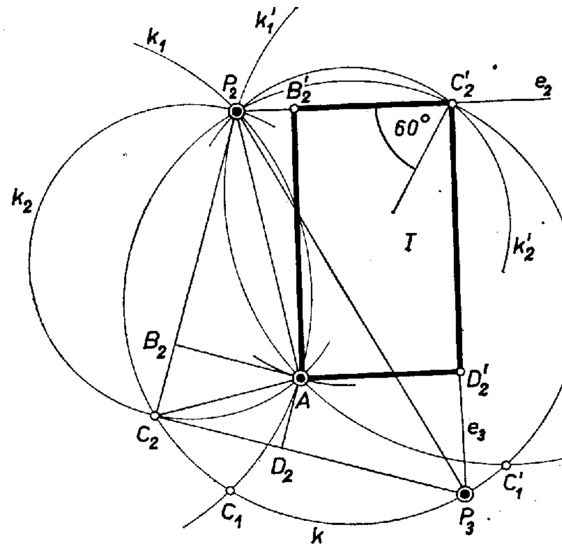
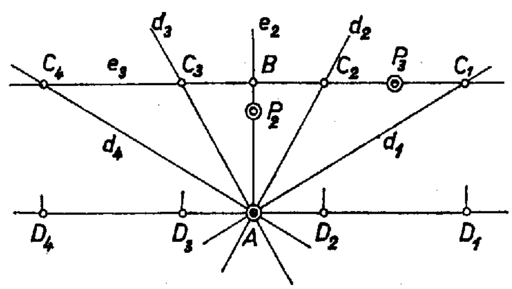
I. Válasszunk ki egy A pontot az adott pontok közül, legyen ez a keresett $ABCD = T$ téglalap előírt csúcsa, a másik két pont pedig P_2 és P_3. Az utóbbiakon mindenesetre két különböző oldalegyenese megy át T-nek, jelöljük ezeket e_2-vel, e_3-mal.



1. ábra

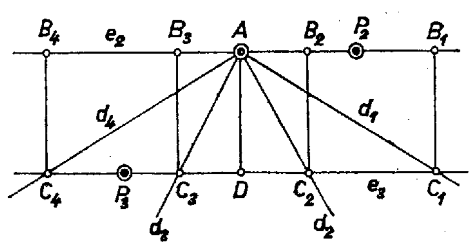
a) Először olyan megoldást keresünk, melyben P_2-n és P_3-on T-nek két szomszédos oldalegyenese megy át és sem e_2, sem e_3 nem megy át A-n. Ekkor ezek egymást T-nek A-val szemben levő C csúcsában metszik (1. ábra), és $P_2CP_3\sphericalangle = 90°$, továbbá az $ACP_2\sphericalangle$ értéke $30°$, $150°$, $60°$ és $120°$ valamelyike. Eszerint C kimetszhető a P_2P_3 átmérőjű k Thalész-körből az AP_2 szakasz $30°$, ill. $60°$ nyílású k_1, k_1', ill. k_2 k_2' látókör-párjával. C egyértelműen meghatározza T-t, hiszen a B, D csúcsot megadja A-nak CP_2-n, ill. CP_3-on levő vetülete.

b) Írjuk elő továbbra is, hogy $e_2 \perp e_3$ legyen, viszont egyikük menjen át A-n, legyen ez e_2. Ekkor az $AP_2 = e_2$ egyenes T-nek mindjárt oldalegyenese, az ezen levő B csúcsot a rá merőleges és P_3-on átmenő e_3 egyenes metszi ki, C-t e_3-ból az A-n átmenő és e_2-höz $30°$-kal vagy $60°$-kal hajló d átlóegyenes, és ezekkel D is meg van határozva (2. ábra).



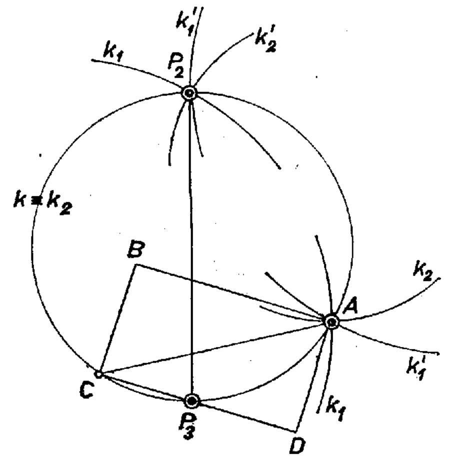
2. ábra

c) Végül olyan megoldást keresve, melyben P_2-n és P_3-on T-nek párhuzamos oldalai mennek át, egyikük átmegy A-n, legyen ez ismét e_2 Ekkor $AP_2 = e_2$ ismét oldalegyenes (legyen AB), CD ezzel párhuzamos és átmegy P_3-on, D az A vetülete e_3-on, C-t kimetszi a fent mondott d egyenes, és ezáltal B is meg van határozva (3. ábra). – Az eddigiekben A, e_2 és e_3 minden előírható kölcsönös helyzetére megadtuk a szerkesztést. Minden esetben nyilvánvaló, hogy a téglalap – ha létrejön – megfelel az előírásoknak.



3. ábra

II. Az *a)* típusú megoldásban P_2 közös pontja a mondott 5 körnek, ezért k_1, k_1', k_2, k_2'; mindegyike általában mégegyszer metszi k-t, C és T létrejön. Amennyiben k érinti a többi körök valamelyikét – nyilvánvalóan csak egyiküket érintheti – C-ként maga P_2 is megfelel, ekkor a CD egyenes P_2P_3, a CB egyenes pedig a közös érintő, mert ekkor a $CA = P_2A$ egyenes $CD = P_2P_3$-mal 30° vagy 60° szöget zár be. Amennyiben k átmegy A-n, a további 4 körnek nincs A-tól és P_2-től különböző közös pontja k-val, de P_2 csak akkor felel meg C-ként, ha $P_3P_2A\sphericalangle = 30°$, vagy 60°. Ebben az esetben viszont a 4 kör egyike azonos k-val, és C lehet k-nak bármely az A-tól különböző pontja (4. ábra).



4. ábra

– Itt említjük, hogy ha k átmegy A-n, akkor olyan kivételes, eddig nem említett típusú megoldás is van, melyben P_2-n, P_3-on az AB, AD oldalegyenesek mennek át; ekkor C-ként vehető a b) típusban meghatározott d egyenesek bármely, A-tól különböző pontja.

A *b)* és *c)* típusú megoldások mindig létrejönnek, azonban a *c)* típusú megoldás egyenes szakasszá fajul el, ha P_3 rajta van AP_2-n.

III. A lehetséges téglalapok száma az *a)* típusban, rögzített A esetén legföljebb 4 – k_1, k_1', k_2, k_2' mindegyikéből 1-, a *b)* és *c)* típus esetében AP_2-t véve oldalegyenesnek 4, mert d-ként 4 egyenes jön szóba, és ugyanennyi, ha AP_3-at vesszük AB-nek. Így (a különleges eseteket nem tekintve) a megfelelő téglalapok száma, A szerepére mindhárom pontot sorra véve $3(4 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 4) = 60$.

Juhász Ágnes (Budapest, Berzsenyi D. g. II. o. t.)
Moson Péter (Budapest, Fazekas M. gyak. g. II. o. t.)