I. megoldás. I. Az $a,\ b,\ c$ paramétereket egyelőre különbözőknek tekintjük. Vonjuk ki (2)-ből (1)-et, (3)-ból (2)-t, majd a keletkező (7)-nek $(b-a)$-szorosából (6)-nak $(c-b)$-szeresét:

$$(b-a)\,y+(b-a)\,(a+b)\,z=B-A, \tag{6}$$

$$(c-b)\,y+(c-b)\,(b+c)\,z=C-B, \tag{7}$$

$$(b-a)\,(c-b)\,(c-a)\,z=(b-a)\,(C-B)-(c-b)\,(B-A). \tag{8}$$

Innen kiszámíthatjuk z-t, az eredmény alapján (6)-ból y-t, majd mindkettő alapján (1)-ből x-et. Legyen rövidítésül

$$(b-a)\,(c-b)\,(a-c)=k,$$

így kellő átalakítások után, a számlálókat $A,\ B$ és C szerint rendezve

$$z=-\frac{1}{k}\big[(c-b)\,A+(a-c)\,B+(b-a)\,C\big], \tag{9}$$

$$\begin{aligned}y=\frac{B-A}{b-a}-(a+b)\,z=\frac{1}{k}\big[(c^2-b^2)\,A+\\ +(a^2-c^2)\,B+(b^2-a^2)\,C\big],\end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}x=B-by-b^2z=-\frac{1}{k}\big[bc\,(c-b)\,A+ca(a-c)\,B+\\ +ab\,(b-a)\,C\big].\end{aligned} \tag{11}$$

Eseteinkben azonban egyszerűbb a behelyettesítés, ha sem (8) jobb oldalán, sem tovább nem bontjuk fel az $A,\ B,\ C$ paraméterekből képezett különbségek zárójeleit:

$$z=\frac{1}{k}\big[(c-b)\,(B-A)-(b-a)\,(C-B)\big], \tag{12}$$

$$y=-\frac{1}{k}\big[(c^2-b^2)\,(B-A)-(b^2-a^2)\,(C-B)\big],$$

$$x=B+\frac{b}{k}\big[c\,(c-b)\,(B-A)-a\,(b-a)\,(C-B)\big]. \tag{13}$$

II. Mármost a (4) értékrendszer esetében (12)-ből, (10) első alakjából és (13)-ból

$$z=0,\qquad x=\frac{B-A}{b-a}=-1,\qquad x=B+b=a+b+c.$$

Az (5) értékrendszer esetében pedig ugyanezekből az alakokból

$$\begin{aligned}z=1,\qquad y&=\frac{B-A}{b-a}-(a+b)=-(a+b+c),\\ x&=B+b\,(a+c)=ab+bc+ca.\end{aligned}$$

III. Ha $a,\ b,\ c$ közül kettő egyenlő, pl. $c=a\neq b$, akkor (3) és (1) bal oldala azonos, ezért a rendszernek vagy nincs megoldása – ha ti. a jobb oldalaik nem egyenlők, mert így (3) és (1) ellentmondók –, vagy számtalan sok megoldása van – amennyiben (3) és (1) jobb oldalai egyenlők, mert így a három ismeretlen meghatározására csak két független egyenletünk van. $c=a$ esetén (4)-ben is, (5)-ben is $C=A$, így az utóbbi eset áll fenn. z értékét tetszés szerint választva (9)-ből, majd (1)-ből

$$y=\frac{B-A}{b-a}-(a+b)z,$$

$$x=A-\frac{a\,(B-A)}{b-a}+abz=a\frac{bA-aB}{b-a}+abz.$$

Speciálisan (4), majd (5) esetében:

$$\begin{cases}y=-1-(a+b)\,z,\\ x=2a+b+abz;\end{cases}\qquad\begin{cases}y=-a-(a+b)\,z,\\ x=a\,(a+b)+abz.\end{cases}$$

Ha pedig $a=b=c$, akkor – az előírt (4) és (5) esetben – az (1)–(3) egyenletek azonosak, bármelyik két ismeretlen értékét tetszés szerint megválasztva a harmadikat velük kifejezhetjük, számtalan sok megoldás van.

Csirmaz László (Budapest, I. István g. I. o. t.)

II. megoldás. (arra az esetre, ha $a,\ b,\ c$ különböző). A feladatot úgy is felfoghatjuk, hogy annak az

$$x+yu+zu^2$$

legfeljebb másodfokú polinomnak az $x,\ y,\ z$ együtthatóit keressük, amely az $u=a,\ b,\ c$ helyeken rendre az $A,\ B,\ C$ értéket veszi fel. Megoldhatjuk a feladatot az interpolációs polinomokra vonatkozó ismeretek alapján is.[1] Ez a polinom az idézett cikk (2) és (3) kifejezéseit felhasználva, *Lagrange*-féle alakjában a következő:

$$A\cdot\frac{(u-b)(u-c)}{(a-b)(a-c)}+B\cdot\frac{(u-a)(u-c)}{(b-a)(b-c)}+C\cdot\frac{(u-a)(u-b)}{(c-a)(c-b)},$$

tehát z-t megadja e polinomban u^2 együtthatója, y-t az u együtthatója, x-et pedig az u-t nem tartalmazó tag:

$$Z=\frac{A}{(a-b)(a-c)}+\frac{B}{(b-a)(b-c)}+\frac{C}{(c-a)(c-b)},$$

$$y=-\frac{(b+c)\,A}{(a-b)(a-c)}-\frac{(c+a)\,B}{(b-a)(b-c)}-\frac{(a+b)\,C}{(c-a)(c-b)},$$

$$x=\frac{bcA}{(a-b)(a-c)}+\frac{caB}{(b-a)(b-c)}+\frac{abC}{(c-a)(c-b)}.$$

Ezek a kifejezések könnyen a (9)–(11) alakra hozhatók.

Hasonlóan a keresett polinom *Newton*-féle alakja, az idézett cikk (1) kifejezését megelőző meggondolás felhasználásával, $c_1,\ c_2,\ c_3$ helyére $e_1,\ e_2,\ e_3$ együtthatót írva, és a polinom előírt értékpárjait $(b,\,B),\ (a,\,A),\ (c,\,C)$ sorrendben felhasználva

$$e_1+e_2(u-b)+e_3(u-b)(u-a)=$$

$$=B+\frac{B-A}{b-a}\cdot(u-b)+\frac{C-B-\dfrac{B-A}{b-a}\cdot(c-b)}{(c-b)(c-a)}\cdot(u-b)(u-a);$$

innen csekély átalakítás után z és x értékét a (12), (13) alakban kapjuk

[1] Lásd pl. *Surányi János:* Interpolációs polinomok előállítása, Megjegyzés az 1378. feladathoz, K. M. L. 31 (1965/11) 112-114. o.