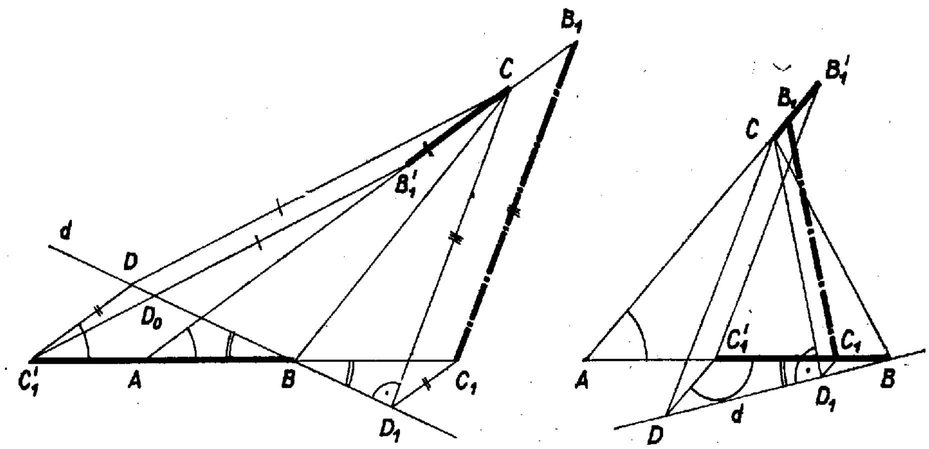
Legyen az adott arányszám k, és B_1', C_1' olyan pontpár, amelyre $BC_1'/CB_1' = k$. Egyszerű áttekintést kapunk a $B_1'C_1'$ szakaszokról, ha minden ilyen szakasszal egyenlő, párhuzamos és egyirányú CD szakaszt húzunk. Ekkor $B_1'C_1'DC$ paralelogramma, vagy $C_1' = A$ esetén D a B_1' tükörképe AC felezőpontjára; így $C_1'D$ párhuzamos, egyirányú és egyenlő $B_1'C$-vel. Tegyük egyelőre fel, hogy k pozitív és válasszuk az oldalegyeneseken a BA és CA irányt pozitív-nak. Ezért

$$DC_1'B\sphericalangle = CAB\sphericalangle \qquad \text{és} \qquad \frac{BC_1'}{DC_1'} = \frac{BC_1'}{CB_1'} = k,$$

mindkettő független a B_1', C_1' pontok megválasztásától.



A keletkező $DC_1'B$ háromszögek tehát hasonlók, s így a $C_1'BD$ szög állandó, a D pontok mind egy B-n átmenő d egyenesen sorakoznak. Fordítva, legyen d-nek tetszés szerinti (B-től és AC-vel való D_0 metszéspontjától különböző) pontja D, húzzunk ezen át párhuzamost AC-vel, legyen ennek AB-vel való metszéspontja C_1', és az ezen át DC-vel párhuzamosan húzott egyenes messe AC-t B_1'-ben; ekkor $BC_1'/CB_1' = k$. Ha $D = D_0$, akkor könnyen látható, hogy $C_1' = A$, és B_1' a D_0 tükörképe AC felezőpontjára.

Akkor lesz $B_1'C_1'$ a legrövidebb, amikor CD, azaz ha D a C pont d-n levő D_1 merőleges vetületébe kerül. Ebből a keresett C_1, B_1 pontpár a fentiek szerint adódik.

Negatív k esetén csak annyi változik, hogy a DC_1B szög a $180° - CAD\sphericalangle$-gel lesz egyenlő. D és d, és belőlük D_1, C_1, B_1 mindig egyértelműen megszerkeszthető, mert D nem eshet B-be, és mert AB és AC nem párhuzamos; ha azonban D_1 a B-ben adódik, akkor C_1 keresett helyzete B, B_1-é pedig C, és ekkor az aránynak nincs értelme.

Berács József (Győr, Czuczor G. Bencés g. II. o. t.)
Hárs László (Budapest, Kölcsey F. g. I. o. t.)

Megjegyzés. A feladat megoldható számítás útján is. A feltétel szerint – a CB_1 szakasz (előjeles) hosszát t-vel jelölve – $BC_1 = kt$. Az AB_1C_1 háromszögben $AB_1 = b - t$, $AC_1 = c - kt$, így $B_1C_1^2$-t a koszinusz-tétellel meghatározva, t-nek egy másodfokú polinomja adódik, amelynek szélső értékét a szokott módon teljes négyzetté kiegészítéssel megállapíthatjuk.

Pintz János (Budapest, Fazekas M. Gyak. g. I. o. t.)
Kóczy László (Budapest, XI., Bocskai úti ált. isk. 8. o. t.)