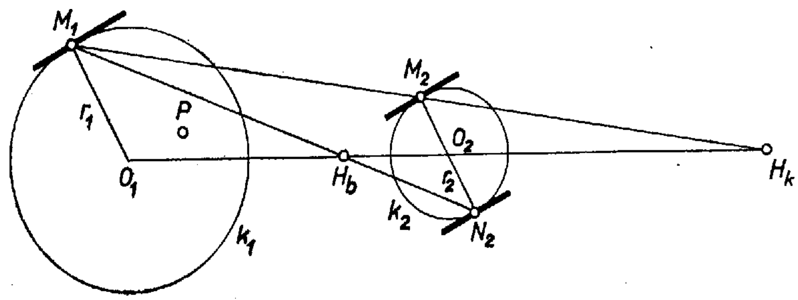
A követelmény egyenértékű azzal, hogy a keresett metszéspontokhoz tartozó sugarak legyenek páronként párhuzamosak, ennélfogva a keresett szelő az adott körök valamely párhuzamos sugár–párjának végpontjait köti össze.



1. ábra

Legyenek az adott körök k_1, k_2 (természetesen ugyanabban a síkban), középpontjaik O_1, ill. O_2, sugaraik hossza r_1, ill. r_2, ahol egyelőre $r_1 > r_2$, egy–egy párhuzamos és egyirányú sugaruk O_1M_1, O_2M_2, és messe az M_1M_2 egyenes az O_1O_2 egyenest H_k-ban. Megmutatjuk, hogy H_k helyzete független M_1, M_2 megválasztásától. $H_kO_1M_1$ és $H_kO_2M_2$ hasonló háromszögek, mert H_k-nál levő szögük közös, O_1-nél, ill. O_2-nél levő szögük pedig egyállású. Ezért

$$\frac{H_kO_2}{H_kO_1} = \frac{H_kO_2}{H_kO_2 + O_2O_1} = \left|\frac{O_2M_2}{O_1M_1} = \frac{r_2}{r_1}\right|,$$

amiből

$$H_kO_2 = \frac{r_2 \cdot O_2O_1}{r_1 - r_2},$$

amint állítottuk. – Legyen másrészt k_2-nek M_2-vel átellenes pontja N_2, ekkor O_1M_1 és O_2N_2 párhuzamos és ellentétes irányú sugarak, és az M_1N_2, O_1O_2 egyenesek metszéspontját H_b-vel jelölve hasonlóan $H_bO_1M_1\triangle \sim H_bO_2N_2\triangle$, mert H_b-nél levő szögeik csúcsszögek, O_1-nél, ill. O_2-nél levő szögük váltószög, így

$$\frac{H_bO_2}{H_bO_1} = \frac{H_bO_2}{O_1O_2 - H_bO_2} = \frac{O_2N_2}{O_1M_1} = \frac{r_2}{r_1},$$

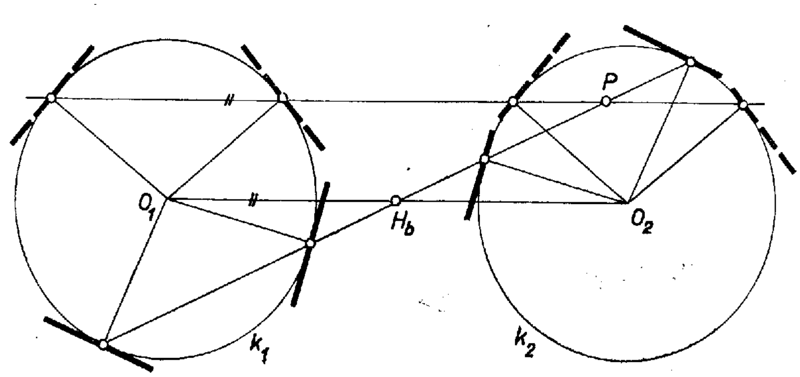
amiből

$$H_bO_2 = \frac{r_2 \cdot O_1O_2}{r_1 + r_2},$$

eszerint H_b helyzete is független M_1, N_2 megválasztásától, a két kör bármely két ellentétes irányú sugarának végpontjait összekötő egyenes az O_1O_2 egyenes ugyanazon pontján megy át. – H_k az adott körök ún. külső hasonlósági pontja – itt mennek át közös külső érintőik is –, H_b pedig a belső hasonlósági pontjuk, itt mennek át közös belső érintőik is, amennyiben a mondott közös érintők léteznek.

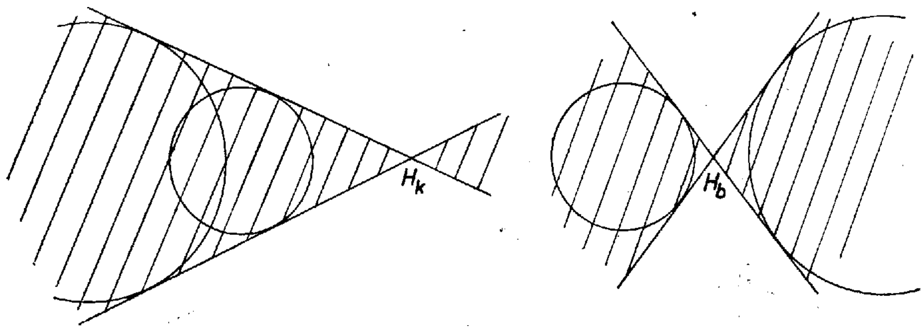
Ezek szerint a keresett szelőnek – azonfelül, hogy átmegy az adott P ponton – át kell mennie H_k és H_b valamelyikén, ezért a szerkesztés a következő. Tetszés szerint felvesszük k_1-en M_1-et, megrajzoljuk k_2-ben az O_1M_1-gyel párhuzamos N_2M_2 átmérőt, továbbá O_1O_2-t, M_1M_2-t és M_1N_2-t, végül az ezek metszéspontjaiként adódó H_k, H_b pontot összekötjük P-vel. A követelményeknek csak ez a két szelő felelhet meg, és ezek – amennyiben metszik a köröket – meg is felelnek.

$r_1 = r_2$ esetén H_k nem jön létre, mert $O_1M_1 \# O_2M_2$ miatt az $O_1O_2M_2M_1$ trapéz paralelogrammává specializálódik. Mivel az M_1M_2 egyenesnek át kell mennie P-n, azért ekkor az egyik megfelelő szelőt a P-n átmenő, O_1O_2-vel párhuzamos egyenes adja (2. ábra). Ugyanekkor H_b az O_1O_2 szakasz felezőpontja.



2. ábra

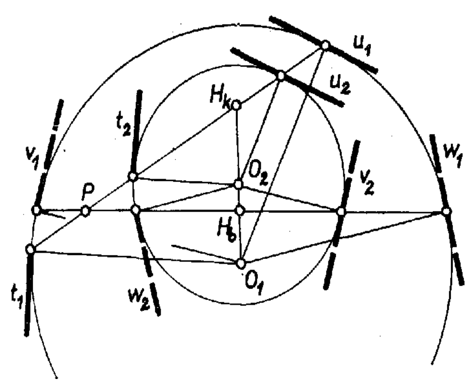
A fentiek szerint P-n át mindig 2 egyenes jön létre, melyek abban az esetben felelnek meg, ha van közös pontjuk a körökkel. Ennek a feltételét keressük. Nyilvánvaló, hogy ha egy ilyen egyenes az egyik kört metszi, vagy érinti, akkor a másikat is.



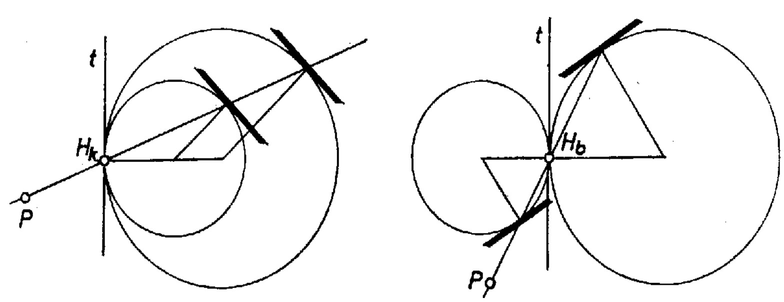
3. ábra

Ha H_k és H_b bármelyike – jelöljük ezt H-val – az egyik körön kívül esik, akkor a másikon is, és ekkor a két kör megfelelő két közös érintője létezik. A PH egyenes akkor metszi a köröket, ha P a két közös érintő által létrehozott 4 szögtartomány közül egy olyannak a belsejében van (a 3. ábrán csíkozva), amelyben a körök egyike is fekszik, ill. PH_k akkor is, ha P a két kört tartalmazó szögtartomány csúcsszögtartományában van. Ekkor PH 2–2 pontban metszi a köröket, így 2, a feladat követelményeinek megfelelő érintőpár adódik. Ha P a közös érintők valamelyikén van, akkor PH szelő helyett érintőt ad, ezt nem tekintjük megoldásnak. Ha viszont P a H-ba esik, a PH egyenes határozatlan, de minden rajta átmenő és a köröket (2 pontban) metsző egyenes megfelel a követelménynek.

Ha H az egyik körön belül esik, akkor a másikon is, tehát PH metszi a köröket, mindig van megoldás (4. ábra).



4. ábra



5. ábra

Végül ha H az egyik körön rajta van, akkor a másikon is, a két kör érintkezik, csak egy közös érintőjük van, t (5. ábra), az így létrejött két félsík minden belső P pontjából kiindulva egy a t-től és egymástól különböző érintőpárra vezető megoldás van.

A megoldások száma most már úgy adódik, hogy számba vesszük mind a PH_k, mind a PH_b révén adódó megfelelő szelőket. Ha nincs számtalan sok megoldás, akkor a megfelelő érintőpárok száma legföljebb 4. Ha P az O_1O_2 egyenesen van, akkor PH_k és PH_b ugyanaz a szelő, de a metszéspontokbeli 2–2 érintő ekkor is 4-féleképpen állítható párba. Ugyanez a helyzet akkor is, ha O_2 egybeesik O_1-gyel, de P ezektől különböző pont, hiszen ekkor H_k, H_b azonos a középpontokkal.

Horváth Sándor (Budapest, I. István Gimn., II. o. t.)
Lengyel Tamás (Budapest, Berzsenyi D. Gimn., I. o. t.)