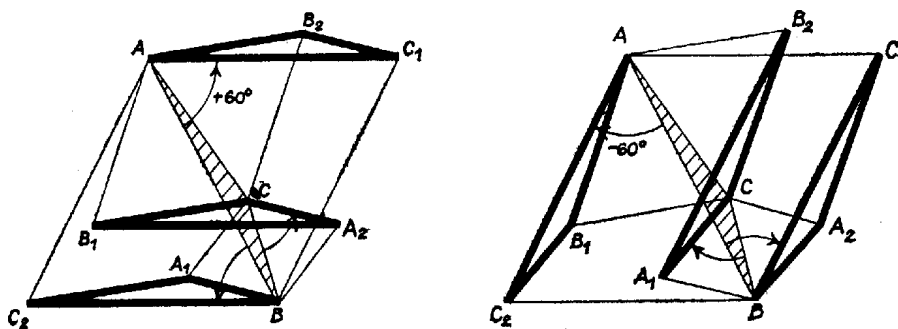


I. Válasszuk az adott háromszög betűzését úgy, hogy csúcsait  $A, B, C$  sorrendben körüljárva a háromszög belseje az útvonaltól balra legyen, más szóval  $ABC$  pozitív körüljárást adjon. Legyenek az oldalakra befelé írt háromszögek  $ABC_1, BCA_1, CAB_1$ , a kifelé írtak  $BAC_2, CBA_2, ACB_2$  (1. a – 1. b ábrák). A feltevés szerint az  $AC_1B_2, C_2BA_1, B_1A_2C$  háromszögek úgy keletkeznek az  $ABC$  háromszögből, hogy ezt rendre az  $A, B, C$  pont körül a pozitív forgási irányban  $60^\circ$ -kal elfordítjuk, ezért az  $AB, BC, CA$  oldalak új helyzetei hármassával egyenlő és párhuzamos szakaszokat adnak:

$$(1) \quad AC_1 \# C_2B \# B_1A_2, \quad C_1B_2 \# BA_1 \# A_2C, \quad B_2A \# A_1C_2 \# CB_1.$$



1.a. és 1.b. ábra

Bármelyik szakaszhármast két szakasza egy paralelogramma két szemben fekvő oldalát adja. Egy hármastól két szakaszt 3-féleképpen választhatunk ki – ti. azzal, hogy egymás után mindegyiket egyszer nem választjuk bele a szakaszpárba, így a 3 hármastól  $3 \cdot 3 = 9$  féleképpen kaphatjuk egy-egy paralelogramma csúcsait.

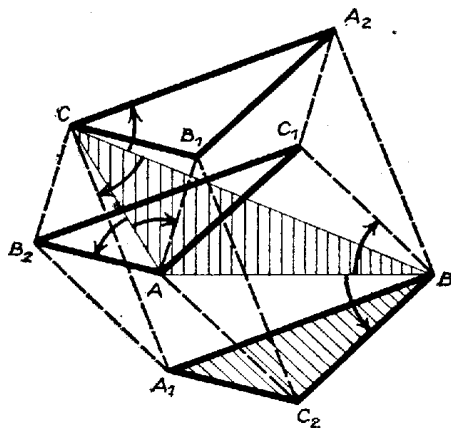
Hasonlóan az  $AC_2B_1, C_1BA_2, B_2A_1C$  háromszögek az  $ABC$  háromszögnek  $A$ , majd  $B$ , végül  $C$  körüli, negatív irányú  $60^\circ$ -os elfordítottjai, ezért az

$$(2) \quad AC_2, C_1B, B_2A_1; \quad C_2B_1, BA_2, A_1C; \quad B_1A, A_2C_1, CB_2$$

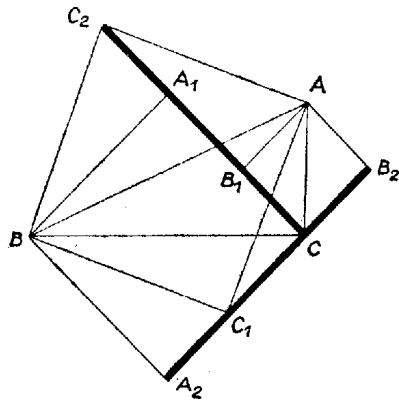
szakaszhármastok bármelyik párja is paralelogrammát ad, de ezek azonosak a fentiekkel, most mindegyiküket az előbb nem említett oldalpárjuk révén kaptuk meg.

Amennyiben az  $ABC$  háromszögben van  $60^\circ$ -os vagy  $120^\circ$ -os szög, egy-egy szakaspár egy egyenesre esik, egy-egy paralelogramma elfajul egyenesszakasszá.

II. Az oldalak fölé egyenlő szárú derékszögű háromszögeket rajzolva minden ilyen háromszögben a szárak – vagyis a befogók –  $\sqrt{2}$ -ször kisebbek az átfogónál, az eredeti háromszög megfelelő oldalánál, másrészt az átfogón levő szögek mindegyike  $45^\circ$ . Eszerint – ismét a fenti betűzést használva – a fenti két háromszög-hármast mindegyik tagja *forgatva nyújtással* keletkezik az eredeti háromszögből, a forgatás szöge  $45^\circ$ , iránya a két háromszög-hármastban megegyező, a nyújtás aránya  $1/\sqrt{2}$ , ezért az (1) és (2) szakaszhármastok tagjai között ismét fennáll az egyenlőség és a párhuzamosság, az állítás érvényes marad (2. ábra).



2. ábra



3. ábra

Derékszögű háromszögből kiindulva itt is elfajulások állnak be (3. ábra).

*Berács József* (Győr, Czuczor G. g. II. o. t.) dolgozatából kiegészítésekkel

*Megjegyzés.* Szabályos háromszögben az I. eset pontrendszere csak 6 pontból áll, és 3 paralelogrammát tartalmaz. Az említett elfajulásokkal szemben egyes speciális esetekben viszont újabb paralelogrammák léphetnek fel, pl. az I. esetben a  $30^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $90^\circ$ , a  $30^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $120^\circ$  szögű háromszögben.