

Ha a VI. felvilágosítás igaz, akkor igaz az V. is, hiszen az egész számok a racionális számok közé tartoznak. Így V. és VI. közül csak a többet mondó VI. lehet a hamis, és V. az igaz:  $b$  racionális szám.

Eszerint a III. nem lehet igaz, mert nincs olyan racionális szám, melynek a négyzete 13. Tehát a IV. felvilágosítás igaz:  $b$  egész szám, osztható 7-tel.

Most már nem lehet igaz az I., mert a 7-tel osztható páros számok oszthatók 14-gyel is, amit a VI. kizárt, ezért  $b$  páratlan, és a II. igaz. Így  $b$  pozitív, különben  $b^3$  sem volna az, és nem lehetne pozitív a  $b + b^3$  összeg; másrészt  $b$  kisebb 20-nál, mert nagyobb számnak a köbe is nagyobb, tehát a  $b + b^3$  összeg is nagyobb, ha nagyobb számból indulunk ki, márpedig  $20 + 20^3 > 8000$ .

Mindezek szerint  $b = 7$ , mert ez az egyetlen pozitív, 20-nál kisebb, páratlan és 7-tel osztható egész szám.

*Megjegyzés.* Bebizonyítjuk a III. felvilágosítás kizárásában felhasznált állítást. Tegyük fel, hogy a  $p/q$  tovább nem egyszerűsíthető racionális számra fennáll  $(p/q)^2 = p^2/q^2 = 13$  (vagyis  $p$  és  $q$  egész számok, és nincs közös osztójuk és természetesen  $p^2$  és  $q^2$  is egész számok). Így  $p^2 = 13q^2$ , eszerint  $p^2$  osztható 13-mal, de akkor  $p$  is, hiszen 13 prímszám, tehát  $p = 13r$ , ahol  $r$  egész szám. Ezt beírva, egyszerűsítés után  $13r^2 = q^2$ , és a meg gondolást ismételve  $q$  is osztható 13-mal, ami ellentmond feltevésünknek. Eszerint valóban nincs olyan racionális szám, melynek négyzete egyenlő 13-mal.