I. A feltevés miatt a BCS egyenlő szárú háromszög BE magassága felezi a CS alapot. Másrészt S harmadolja a C-ből induló CF súlyvonalat, így $SF = SC/2 = SE$, tehát $FE = 2FS$, $FC = 3 \cdot FS$. Az FCD és FBE közös hegyesszöggel bíró derékszögű háromszögek hasonlók, ezért

$$FD : FC = FE : FB,$$

$$FD \cdot FB = FD(FD + DB) = FC \cdot FE = 6 \cdot FS^2. \tag{1}$$

Az ABC derékszögű háromszög magasságára fennáll:

$$CD^2 = AD \cdot BD = 2FD \cdot BD,$$

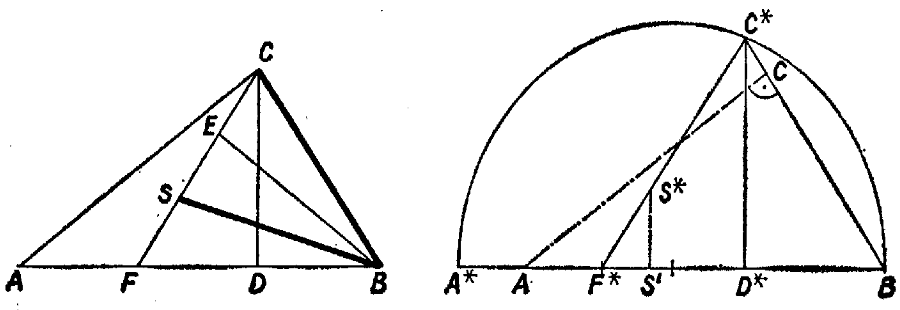
így a CFD derékszögű háromszögből

$$FD^2 + CD^2 = FC^2, \quad \text{azaz} \quad FD^2 + 2FD \cdot BD = 9 \cdot FS^2. \tag{2}$$

Kivonva (1) háromszorosából (2) kétszeresét:

$$FD(3FD + 3DB - 2FD - 4BD) = FD(FD - BD) = 0.$$

Nem lehet $FD = 0$, ezért $FD - BD = 0$, azaz $FD = BD$, $AD = 2BD$, vagyis a D talppont harmadolja az AB átfogót.



II. A talált tulajdonság alapján a keresetthez hasonló háromszöget szerkeszthetünk, ezt pedig hasonlósági transzformációval a kívánt méretűre nagyíthatjuk. A 2. ábrán B-től 3-szor mértük fel a BD^* szakaszt, a végpont A^*, az A^*B átmérőjű félkör és a D^*-ban BD^*-ra állított merőleges metszéspontja C^*, a BC^* félegyenesre felmértük az adott BC szakaszt és a végpontban állított merőlegessel a BD^* félegyenesből kimetszettük A-t.

Elég azt bizonyítanunk, hogy az $A^*C^*D^*$ háromszög S^* súlypontjára nézve $S^*B = C^*B$, mert így a nagyításban $SB = CB$ lesz. Legyen S^* vetülete a BA^*-on S', és D^*A^* felezőpontja F^*. Így $S^*S' = C^*D^*/3$, továbbá $S'D^* = 2F^*D^*/3 = A^*D^*/3 = 2BD^*/3$, $S'B = 5BD^*/3$, és a szerkesztésnél fogva $C^*D^{*2} = A^*D^* \cdot BD^* = 2BD^{*2}$, hiszen BA^*C^* derékszögű háromszög.
Ezért

$$BS^{*2} = S^*S'^2 + S'B^2 = \frac{C^*D^{*2}}{9} + \frac{25BD^{*2}}{9} = \frac{C^*D^{*2}}{9} + \frac{16BD^{*2}}{9} + $$
$$+ BD^{*2} = \frac{C^*D^{*2}}{9} + \frac{8C^*D^{*2}}{9} + BD^{*2} = C^*D^{*2} + BD^{*2} = BC^{*2},$$

tehát valóban $BS^* = BC^*$.

Szentmiklósi László (Kiskunhalas, Szilády Á. g. I. o. t.)

Megjegyzések. 1. A BCS háromszög közvetlenül megszerkeszthető abból, hogy $CS = 2CF/3 = 2BC/3$, az adott szakasz $^2/_3$ része, hiszen a talált összefüggés szerint $FCD\Delta \simeq BCD\Delta$.

2. A vizsgált kérdéshez kapcsolódik az 1057. gyakorlat.[1]

[1] Lásd ezen számban 221. old.