A szokásos jelöléseket használva a követelmény:

$$s=k^2,\qquad s-a=l^2,\qquad s-b=m^2,\qquad s-c=n^2,$$

ahol k, l, m, n természetes számok. Az utolsó három egyenlet összegét az elsővel egybevetve

$$(s-a)+(s-b)+(s-c)=3s-(a+b+c)=3s-2s=s,$$

így a keresett természetes számokra teljesülnie kell az

$$l^2+m^2+n^2=k^2 \tag{1}$$

egyenletnek. Ennek az egyenletnek minden megoldása egy megfelelő számhármast ad:

$$a=s-l^2=k^2-l^2,\qquad b=k^2-m^2,\qquad c=k^2-n^2, \tag{2}$$

ugyanis ezekre szükségképpen teljesülnek a háromszög egyenlőtlenségek, hiszen ha pl.

$$0<s-a=\frac{b+c-a}{2},\quad \text{akkor}\quad b+c>a.$$

Megmutatjuk, hogy l értékét tetszés szerinti természetes számnak, m-ét pedig tetszés szerinti páros számnak választva (1)-nek egy megoldását kapjuk. Ugyanis $l^2+m^2=M$ jelöléssel

$$k^2-n^2=(k-n)(k+n)=M,$$

és itt M mindig felbontható olyan u, v természetes számpár $(u<v)$ szorzatára, hogy a

$$k-n=u,\qquad k+n=v$$

rendszerből

$$k=\frac{v+u}{2},\qquad n=\frac{v-u}{2} \tag{3}$$

természetes számok. Valóban, ha l páratlan, akkor M is páratlan, és mindenesetre megfelel $u=1$, $v=M$ (>1), mert így a (3)-beli törtek számlálója páros szám; ha pedig l páros szám, akkor M osztható 4-gyel, mert mindkét tagja osztható vele, így $u=2$ és $v=M/u=M/2$ (>2) mindegyike páros, k és n ismét természetes szám.

Mindenesetre egyenlő szárú háromszöget kapunk $l=m$ választással. Legyen pl. $l=m=2$, így $M=8$; a fentiek szerint $u=2$ és $v=4$ választással (3)-ból, majd (2)-ből $k=3$, $n=1$, $a=b=5$, $c=8$, $s=9$ és $t=klmn=12$.

Az $l\neq m$ választás nem biztosítja, hogy a háromszög oldalai különbözők lesznek – pl. $l=1$, $m=2$ az előbbi példára vezet –, azonban néhány próba után a második követelményt kielégítő megoldást is kapunk: az $l=3$, $m=2$ számpárból kiindulva $k=7$, $n=6$, $a=40$, $b=45$, $c=13$; $s=49$, $t=252$.

Koren András (Budapest, I. István g. II. o. t.)

Megjegyzések. 1. Úgy is kaphatunk megoldást (1)-re, hogy egy tetszés szerinti pitagoraszi számhármashoz – pl. 3, 4, 5 – olyan másikat keresünk, melyben az első hármas átfogószáma az egyik befogószám szerepét játssza, a példát folytatva 5, 12, 13. Így $k=13$, $l=3$, $m=4$, $n=12$; $a=160$, $b=153$, $c=25$. Ennél azonban kisebb háromszög oldalhármas is található.

Mérő László (Budapest, Berzsenyi D. g. II. o. t.)

2. Több dolgozatban olvasható, hogy keresni kellene a pitagoraszi számhármasokat megadó $(u^2-v^2)^2+(2uv)^2=(u^2+v^2)^2$ azonossághoz hasonló olyan azonosságot, amelyből (1)-re több megoldás képezhető (ugyanis a közkézen forgó gyűjteményekben ilyen nem található). Néhányan közöltek is ilyet.

Minden páros m szám négyzetéhez található olyan l, n egész számpár, hogy $2ln=m^2$. Ekkor (1) bal oldala $l^2+2ln+n^2=(l+n)^2$, tehát $k=l+m^2/2l$. (Pl. $m=2$, $l=1$, $n=2$, $k=3$.) A törtek kiküszöbölésével a $(2l^2)^2+(2lm)^2+(m^2)^2=(2l^2+m^2)^2$ azonosság adódik, amely az l, n paraméterek bármely pozitív egész értékpárja esetére megoldást ad (de nem ad meg minden megoldást; *Rajczy Péter*, Bp., Eötvös Gimn.).

Egy másik, 2 paraméteres megoldás: $(2uv)^2+(4uv)^2+(u^2-5v^2)^2=(u^2+5v^2)^2$ (*Moson Péter*, Bp., Fazekas Gimn.).

Egy 1 paraméteres megoldás: $u^2+(u+1)^2+\left[u(u+1)\right]^2=\left[u(u+1)+1\right]^2$ (*Takács László*, Sopron, Széchenyi Gimn.). Ebből $u=3$ esetén a már látott 3, 4, 12, 13 megoldás adódik.

Lásd még az ezen számban kitűzött 1085. gyakorlatot.